

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/281905108>

Magnetfeldabhängig Strom-Phasenbeziehung schwach gekoppelter Supraleiter

Thesis · September 2002

DOI: 10.13140/RG.2.1.4956.4649

CITATIONS

0

READS

77

1 author:



[Regine Frank](#)

Larkin University & Donostia International Physics Center

52 PUBLICATIONS 423 CITATIONS

SEE PROFILE

Magnetfeldabhängige
Strom - Phasenbeziehung
schwach gekoppelter Supraleiter

Diplomarbeit
von

Regine Frank

Institut für Theoretische Physik
Lehrstuhl für Theoretische Festkörperphysik
Universität Tübingen

September 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Der Supraleiter-Halbleiter-Supraleiter-Kontakt	5
2.1	Der schematische Aufbau der SHS-Sandwichstruktur	5
2.2	Der SHS-Kontakt im äußeren Magnetfeld	8
3	Quasiklassische Methoden	11
3.1	Die Bogoliubov-de Gennes Gleichungen	13
3.2	Die Gorkov-Gleichungen	15
3.3	Die Eilenberger-Gleichungen	17
3.3.1	Herleitung aus der quasiklassischen Greensfunktion	17
3.3.2	Umformung der Eilenberger-Gleichungen	20

4	Andreev-Reflektion	27
5	Das resultierende Magnetfeld	33
5.1	Fourier-Transformation des Josephson-Stroms	33
5.2	Magnetfeldberechnung aus der Maxwell-Gleichung	35
6	Josephson-Strom in Abhängigkeit vom allgemeinen Magnetfeld	39
6.1	Transformation ins Fermi-System	40
6.2	Die Lösung des Riccati-Gleichungssystems	41
7	Strom-Charakteristik in der Barriere	49
7.1	Strom-Phasenbeziehung in Theorie und Experiment	49
7.2	Josephson-Eindringtiefe im Halbleiter	51
8	Auswertung des resultierenden Magnetfelds	57
8.1	Auswertung analytischer Ergebnisse	57
8.2	Strom- und Feldverteilung ohne Phasendifferenz zwischen den Supraleitern	58
8.3	Strom- und Feldverteilung bei endlicher Phasendifferenz	63

8.4	Numerische Auswertung der Selbstkonsistenzrechnungen	66
9	Zusammenfassung und Ausblick	75
A	Fourier-Transformation des Josephson-Stroms	77
A.1	Die Transformation	78
A.2	Berechnung der Fourier-Reihe mit dem Residuensatz	81
B	Die Berechnung des resultierenden Magnetfelds	87
	Literaturverzeichnis	95

Kapitel 1

Einleitung

Seit der theoretischen Vorhersage des Josephson Effekts [1] durch B. D. Josephson im Jahr 1962 und der ersten experimentellen Bestätigung durch Anderson und Rowell im Jahr 1963 [2], steht die sogenannte Josephson Physik im Blickfeld der Forschung. Das Interesse ist dabei sowohl auf die vielseitige Grundlagenphysik, als auch auf zahlreiche technische Anwendungen zurückzuführen.

Der Josephson-Effekt tritt zwischen zwei Bereichen supraleitenden Materials auf, wenn diese nur schwach miteinander gekoppelt sind. Eine solche schwache Kopplung läßt sich technisch in sogenannten Josephson-Kontakten realisieren, in denen zwei Supraleiter etwa über eine Tunnelbarriere, eine kurze Verengung des Supraleiters, oder ein normalleitendes Metall elektrisch miteinander verbunden sind [3]. Josephson-Kontakte dieser drei Bauformen werden entsprechend ihres strukturellen Aufbaus als SIS-, SCS- und SNS-Kontakte bezeichnet, wobei S für Supraleiter, I für Isolator (Tunnelbarriere), C für Verengung (constriction) steht. In Folge des Josephson-Effekts kann ein Josephson-Kontakt auch Supraströme tragen, deren Stärke durch die für den Kontakt charakteristische Stromdichte J_c nach oben beschränkt ist. In einer kleinen Umgebung der Stelle schwacher Kopplung läßt sich die Supraströmdichte J_s durch den Kontakt lokal beschreiben als $J_s = J_c \cdot \sin \phi$, wobei ϕ die Phasendifferenz zwischen den beiden supraleitenden Elektroden ist. Die dem Josephson-Effekt zugrundeliegende Physik ist nicht zuletzt deshalb von großem Interesse, weil sich hierbei quantenmechanische Eigenschaften in makroskopischen Meßgrößen

manifestieren. Die Phasendifferenz zwischen den Wellenfunktionen, welche die für die Supraleitung verantwortlichen Cooperpaare in den beiden Supraleitern charakterisieren, bestimmt sowohl den über den Kontakt fließenden Strom als auch die Spannung, die über dem Kontakt abfällt. Der Josephson Effekt in SNS-Kontakten ist bereits seit geraumer Zeit Gegenstand sowohl der experimentellen [4, 5] als auch der theoretischen Forschung [6], wobei das Hauptaugenmerk bislang auf der Berechnung des kritischen Stroms J_c [7] lag. Bereits de Gennes [6] zeigte, daß die Existenz eines Suprastroms in solchen Strukturen durch den Proximity-Effekt verursacht wird. In den letzten Jahren wurde deutlich, daß Proximity-Effekt [8] und Andreev-Reflektion zwei Facetten des selben Phänomens darstellen (s. Kapitel 4). Es werden Korrelationen im normalleitenden Bereich des Kontakts erzeugt, welche dort Supraleitung ermöglichen. Diese Korrelationen werden von phasenkohärenter Andreev-Reflektion an der S-N-Grenzfläche vermittelt.

Zu den bekanntesten technischen Anwendungen des Josephson-Effekts zählen sogenannte **S**uperconducting **Q**Uantum **I**nterference **D**evelopments, kurz SQUIDs. Diese sind in der Lage, magnetische Flußänderungen zu messen, die kleiner sind als ein hunderttausendstel (10^{-5}) des elementaren Flußquants Φ_0 . Aktuelle Forschungsaktivitäten zielen auch in Richtung weiterer Quanteneffekte in Josephson-Kontakten. Neuere Arbeiten beschäftigen sich z. B. mit mesoskopisch langen Kontakten [9] oder untersuchen makroskopisches Quantentunneln (MQT) und makroskopische Quantenkohärenz (MQC) [10]. Ein weiteres Hauptforschungsgebiet beschäftigt sich mit nichtlinearer Elektrodynamik [11], z. B. der Flußdynamik in Schichtstrukturen [12].

Nichtgleichgewichts-Phänomene in supraleitenden Systemen [13] haben in letzter Zeit enorm an Bedeutung gewonnen, da neue Experimente [14] nichtlokale und größenabhängige Effekte unterhalb der charakteristischen Energie $E_{\text{Thouless}} = \hbar D/L^2$ zeigen. Hierbei ist $D = v_F l_e/3$ die Diffusionskonstante im Halbleiter, v_F die Fermigeschwindigkeit, l_e die mittlere freie Weglänge der Ladungsträger und L die Länge des Kontakts. Die Untersuchung dieser Fragestellungen ist sowohl für die Grundlagenforschung als auch für nanoelektronische Anwendungen [15] interessant. Ein Beispiel dafür sind SNS-Transistoren (vgl. Abb. 1.1), welche bereits experimentell untersucht wurden [16, 17]. Für die Computer-Technologie bieten logische Schaltkreise aus Josephson-Kontakten interessante Anwendungsmöglichkeiten. Die sogenannte RSFQ Impulse Logic versucht beispielsweise Alternativen zur gängigen Halbleiter-Technologie zu eröffnen. RSFQ steht für *Rapid Single Flux Quantum*. In RSFQ Bauteilen werden bewegte Flußquanten als Informationsträger benutzt – das Eintreffen

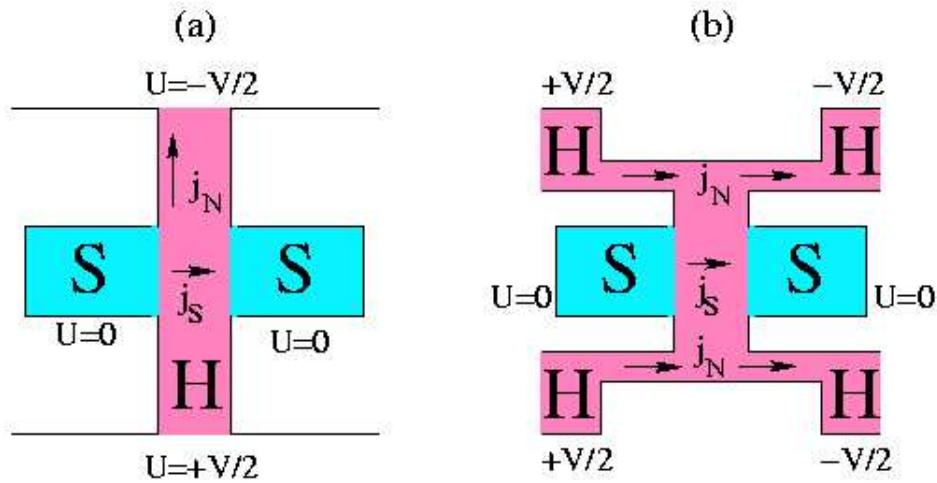


Abbildung 1.1: Mögliche Realisierungen von SHS-Transistoren, welche als SNS-Transistor bereits existieren [16]. Der Suprastrom wird (a) mittels eines orthogonalen oder (b) parallel angelegten Normal-Stroms gesteuert.

eines solchen Flußquants an einer bestimmten Stelle in einem bestimmten Zeitintervall symbolisiert die logische Eins, das Ausbleiben die Null. Gesteuert wird der Prozeß durch einen externen Takt oder, und das ist grundlegend anders als in der Halbleiter-Technik, durch einen internen, selbst erzeugten Takt. Ziel ist es, Verarbeitungsgeschwindigkeiten im Sub-Terahertz Bereich zu erreichen. Testschaltungen haben ihre Funktionsfähigkeit bis zu rund 100 GHz bereits unter Beweis gestellt, siehe z.B. [18].

In dieser Diplomarbeit wird das Verhalten eines mesoskopisch langen Josephson-Kontakts im ballistischen Regime behandelt. Dieser wird in einem äußeren Magnetfeld untersucht, wobei eine Halbleiter-Barriere als Trennschicht zwischen zwei supraleitenden Elektroden verwendet wird (SHS-Kontakt). Während in den oben angeführten Arbeiten der kritische Strom J_c Gegenstand der Untersuchungen ist, steht hier die magnetfeldabhängige Stromdichteverteilung innerhalb der Barriere im Mittelpunkt der Betrachtungen. Diese entspricht einem entlang der Breite des Josephson-Kontakts periodischen Quasiteilchen-Strom, welcher zunächst durch quasiklassische Methoden analytisch bestimmt wurde [19]. Das Auftreten von Wirbelströmen, welche durch ein äußeres Magnetfeld senkrecht zur Ebene des Kontakts hervorgerufen werden, führt auf ein Selbstkonsistenz-Problem, das ausschließlich numerisch gelöst werden kann. Aus dem iterativ berechneten, selbstkonsistenten Josephson-Strom wird die

Josephson-Eindringtiefe λ_J bestimmt, die das Abschirmverhalten der Halbleiterbarriere gegenüber dem äußeren Magnetfeld für verschiedene Temperaturen und Magnetfeldstärken charakterisiert.

Die hier gezeigte quasiklassische Herleitung des Josephson-Stroms ist besonders deshalb interessant, weil sie in jüngster Zeit durchgeführte Experimente [20, 21] theoretisch beschreiben kann, was in Kapitel 7.1 ausführlich diskutiert wird.

Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: Zuerst wird der zu untersuchende Kontakt im Detail charakterisiert. Anschließend diskutiere ich das Verhalten der Stromverteilung in der Barriere bei Anwesenheit eines homogenen externen Magnetfelds für den Grenzfall, daß keine äußere Spannung anliegt. Im weiteren werden theoretische Methoden vorgestellt, die geeignet sind, den Kontakt in einem quasiklassischen Regime, also im Niederenergie-Bereich, zu beschreiben. Der für diese Arbeit wichtigste physikalische Prozeß, die Andreev-Reflektion an den S-H-Grenzflächen des Kontakts, wird in einem eigenen Kapitel erläutert. Das Verhalten der Stromverteilung in der Barriere unter Anwesenheit eines allgemeinen, nicht notwendigerweise homogenen, äußeren Magnetfelds wird im Detail diskutiert. Daran anknüpfend erfolgt die selbstkonsistente Berechnung des Josephson-Stroms mittels der Maxwell-Beziehungen und deren graphische Auswertung. Aus dem selbstkonsistenten Strom wird die Josephson-Eindringtiefe bestimmt, und schließlich werden die theoretisch gewonnenen Ergebnisse mit aktuellen Experimenten verglichen.

Kapitel 2

Der Supraleiter-Halbleiter-Supraleiter-Kontakt

2.1 Der schematische Aufbau der Supraleiter-Halbleiter-Supraleiter-Sandwichstruktur

In dieser Diplomarbeit wird eine Supraleiter-Halbleiter-Supraleiter-Schichtstruktur (Sandwichstruktur) betrachtet. Der in Abb. (2.1) dargestellte Kontakt besteht aus zwei jeweils halbusendlich ausgedehnten Typ-I Supraleitern und einer halbleitenden Barriere. Die Länge der Barriere wird in x -Richtung gemessen und beträgt $2L$. Weiterhin sind die Supraleiter jeweils im rechten bzw. linken Halbraum unendlich ausgedehnt, d. h. Rückstreuungseffekte an den Enden der Supraleiter treten nicht auf. In y -Richtung herrscht Translationsinvarianz. Bei einem in dieser Richtung beliebig ausgedehnten Kontakt sind periodische Randbedingungen gegeben. Für die nachfolgenden Betrachtungen wird das Modell insofern vereinfacht, als daß man die physikalischen Effekte auf ein rein zweidimensionales Problem in der x - y -Ebene reduziert. Oberflächeneffekte werden also nicht betrachtet.

Eine halbleitende Schicht als Barriere zwischen den beiden Supraleitern bie-

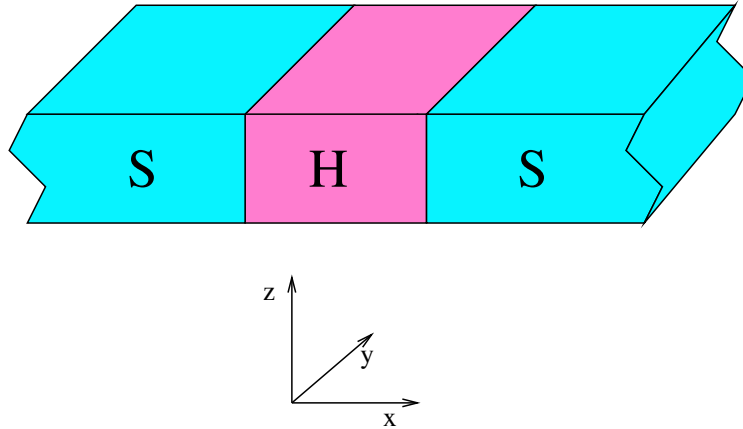


Abbildung 2.1: Schematischer Aufbau des untersuchten Schicht-Kontaktes, bestehend aus zwei halbusendlich ausgedehnten Supraleitern und einer halbleitenden Barriere. Das System sei in z -Richtung hinreichend dünn. Es wird als zweidimensional angenommen. In y -Richtung ist es unendlich ausgedehnt (long junction), wobei periodische Randbedingungen Translationsinvarianz garantieren. Die Länge der Barriere entlang der x -Richtung beträgt $2L$.

tet gegenüber einer normalleitenden Barriere entscheidende Vorteile: In einem Halbleiter ist es möglich, die Fermigeschwindigkeit durch Dotieren auf die Fermigeschwindigkeit des Supraleiters abzustimmen. Eine sehr kleine BCS-Wechselwirkungskonstante g garantiert, daß keine Kopplungseffekte auftreten [22, 23]. Außerdem sind an den Grenzen des halbleitenden Bereichs weder Oxidschichten noch Schottky-Barrieren vorhanden. Damit ist gewährleistet, daß die Fermigeschwindigkeit in allen drei Bereichen des Kontakts nahezu identisch ist, was eine hohe Transparenz der Barriere für die betrachteten Quasiteilchen bedeutet. Dadurch ist es möglich, auf die Betrachtung konventioneller Streuung der Quasiteilchen, vergleichbar dem Übergang von Licht zwischen Medien verschiedener Dichte, gänzlich zu verzichten. Dieser Umstand wiederum berechtigt zu der Annahme, daß die Trajektorien der Quasiteilchen in quasiklassischer Näherung über den gesamten Kontakt hinweg als Geraden betrachtet werden können, d.h. das System befindet sich im ballistischen Regime. Eine Tatsache, welche erstens die Anwendung der Eilenberger Gleichungen zur Berechnung des Josephson-Stroms sehr erleichtert, zweitens können die innerhalb der Barriere fließenden Wirbelströme somit ausschließlich auf den Mechanismus der Andreev-Reflektion zurückgeführt werden.

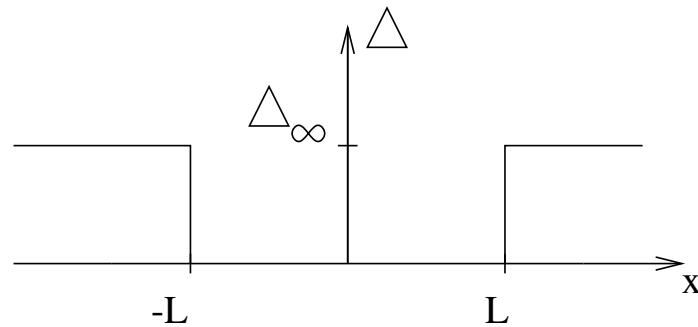


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung des Paarpotentials Δ über den Verlauf der SHS-Schichtstruktur hinweg. Die Stufenform ist eine Vereinfachung der selbstkonsistent bestimmten Energielücke (Gap). Der Wert Δ_∞ bezeichnet den, wegen des vollständigen Meißner-Effekts notwendigerweise konstanten, endlichen Wert des Paarpotentials in den Supraleitern.

Charakteristische Unterschiede zwischen Halbleiter- und Normalleiterbarriere, wie der Transport durch Löcher oder die Existenz von Exzitonen, sollen in dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden.

Für die beiden Supraleiter wird im folgenden angenommen, daß sie vollständig identische Eigenschaften haben, und sich vom halbleitenden Bereich durch ein von Null verschiedenes Paarpotential Δ unterscheiden. Dieses Paarpotential müßte eigentlich selbstkonsistent aus den Bogoliubov-de Gennes Gleichungen (3.11) bestimmt werden, aber an dieser Stelle führt ein Stufenpotential, wie es in Abb. (2.2) skizziert ist, bereits zu hinreichenden Ergebnissen [22, 24]. Die Variation des Paarpotentials im Supraleiter kann ebenfalls vernachlässigt werden [25], da beim extremen Typ-I-Supraleiter der Meißner-Effekt vollständig ausgeprägt und daher die Beeinflussung der Energielücke durch ein externes Magnetfeld ausgeschlossen ist.

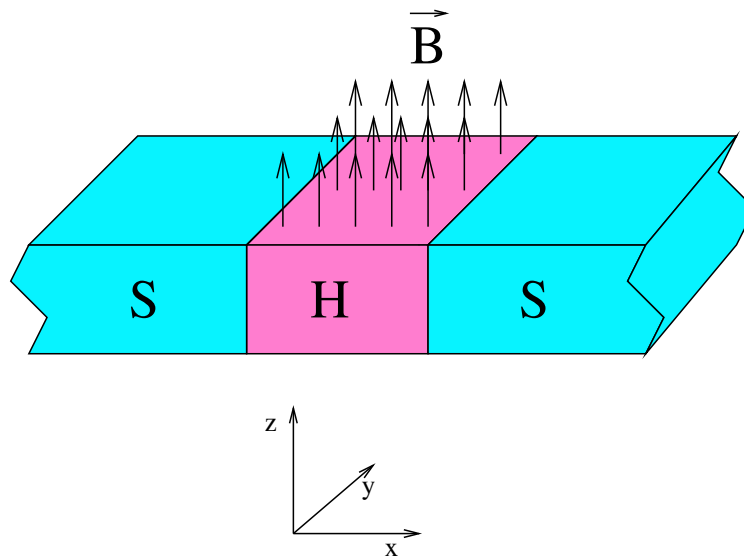


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung der untersuchten Schichtstruktur, welche einem externen Magnetfeld \mathbf{B} ausgesetzt ist. Dieses Magnetfeld besitzt ausschließlich eine Komponente senkrecht zum Kontakt in z -Richtung.

2.2 Der SHS-Kontakt im äußeren Magnetfeld

Ziel der nun folgenden Betrachtungen ist es, den Einfluß eines Magnetfelds auf die Stromverteilung in der Barriere der Schichtstruktur zu bestimmen. Diese Situation ist in Abb. 2.3 graphisch dargestellt. Das äußere Magnetfeld besitzt ausschließlich eine Komponente senkrecht zum Kontakt in z -Richtung. Die Andreev-reflektierten Quasiteilchen bewegen sich nun nicht mehr auf geraden Trajektorien, sondern es findet ein Prozeß statt, den man als induzierten Meißner-Effekt im Halbleiter bezeichnen kann. In der Barriere bilden sich – in Abhängigkeit von der Stärke des äußeren Magnetfelds – Wirbelströme aus, welche wiederum ein Magnetfeld erzeugen. Dieses verstärkt das äußere Feld oder schwächt es, je nach Orientierung des Wirbels, ab. Das resultierende Magnetfeld soll in dieser Arbeit selbstkonsistent bezüglich der mit der Eilenberg-Gleichung errechneten Stromverteilung in der Barriere und den Maxwell-Gleichungen bestimmt werden. Das von außen angelegte Feld wird in diesem Schritt als konstant angenommen. Später werden diese Betrachtungen auf ein allgemeines Magnetfeld ausgedehnt. Über die Beziehung $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ist das

Magnetfeld \mathbf{B} mit einem Vektorpotential \mathbf{A} verknüpft. Dieses Vektorpotential habe in der Landau-Eichung folgende Gestalt:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} (0, A_y(-L, y), 0) & ; x \leq -L \\ (0, A_y(x, y), 0) & ; |x| < L \\ (0, A_y(L, y), 0) & ; x \geq L. \end{cases} \quad (2.1)$$

Um den Kontakt vollständig zu charakterisieren, ist noch die Phase des Paarpotentials festzulegen. Liegt kein äußeres Magnetfeld an, so fließt im halbleitenden Bereich ein homogener Strom in x -Richtung, d. h. das System ist in y -Richtung translationsinvariant. Im supraleitenden Bereich fließt der Strom aufgrund des Meißner-Effekts [26] an der Oberfläche der Supraleiter ab. Somit kann die Phase des Paarpotentials als konstant angenommen werden [27], d. h. es gilt folgende Beziehung:

$$\Delta(x, y, z) = \begin{cases} \Delta_\infty \exp(i\phi_1) & ; x \leq -L \\ 0 & ; |x| < L \\ \Delta_\infty \exp(i\phi_2) & ; x \geq L. \end{cases} \quad (2.2)$$

Dabei stellen ϕ_1 und ϕ_2 jeweils die Phase im linken bzw. rechten Supraleiter dar. Legt man nun ein äußeres Magnetfeld \mathbf{B} an den Kontakt an, so wird dieses Feld aus dem Supraleiter vom Typ I nahezu vollständig verdrängt, d. h. es fließt ebenfalls kein Strom im Inneren des Supraleiters. Das mit dem Magnetfeld verknüpfte Vektorpotential \mathbf{A} , welches auch im supraleitenden Bereich existiert, muß also durch einen Phasengradienten kompensiert werden. Es gilt:

$$\mathbf{J}_S = \frac{e\hbar}{m} n_S \nabla \phi - \frac{2e^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{r}) n_S \equiv 0, \quad (2.3)$$

wobei \mathbf{J}_S den Cooperpaar-Strom und n_S die Cooperpaar-Dichte im Innern des Supraleiters bezeichnen, e die Elementarladung, m die Elektronenmasse, und c die Lichtgeschwindigkeit, und $2\pi\hbar$ das Plancksche-Wirkungsquantum. Darum ergibt sich für das Paarpotential $\Delta(\mathbf{r})$ folgende Beziehung:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} \Delta_\infty \exp\left[\int_0^y \frac{2e}{\hbar c} A_y(\mathbf{r}) dy + i\phi_1\right] & ; x \leq -L \\ 0 & ; |x| < L \\ \Delta_\infty \exp\left[\int_0^y \frac{2e}{\hbar c} A_y(\mathbf{r}) dy + i\phi_2\right] & ; x \geq L. \end{cases} \quad (2.4)$$

Mit diesen hier vorgestellten Modellannahmen für ein konstantes Magnetfeld löst man nun die Riccati-Gleichungen in reeller Eichung, welche durch Umformung aus den Eilenberger Gleichungen (s. Kapitel 3) gewonnen werden, analytisch.

Bezüglich der reellen Eichung gilt:

$$a(\mathbf{r}) = \tilde{a}(\mathbf{r}) \exp(+i\phi(\mathbf{r})) \quad (2.5)$$

$$b(\mathbf{r}) = \tilde{b}(\mathbf{r}) \exp(-i\phi(\mathbf{r})). \quad (2.6)$$

Dabei sind $a(\mathbf{r})$ und $b(\mathbf{r})$ die Lösungen der Riccati-Gleichungen und $\tilde{a}(\mathbf{r})$, bzw. $\tilde{b}(\mathbf{r})$ die Lösungen in reeller Eichung. In reeller Eichung lauten die Riccati-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \hbar\mathbf{v}_F \cdot \nabla \tilde{a}(\mathbf{r}) + \left[2\epsilon_n + 2i\hbar\mathbf{v}_F \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{2} - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \right. \\ \left. + |\Delta(\mathbf{r})| \tilde{a}(\mathbf{r}) \right] \tilde{a}(\mathbf{r}) - |\Delta(\mathbf{r})| = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

sowie:

$$\begin{aligned} \hbar\mathbf{v}_F \cdot \nabla \tilde{b}(\mathbf{r}) - \left[2\epsilon_n + 2i\hbar\mathbf{v}_F \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{2} - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \right. \\ \left. + |\Delta(\mathbf{r})| \tilde{b}(\mathbf{r}) \right] \tilde{b}(\mathbf{r}) + |\Delta(\mathbf{r})| = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dabei bezeichnen \mathbf{v}_F die Fermigeschwindigkeit und ϵ_n die Matsubara-Frequenzen. Im folgenden Kapitel werden die wichtigsten quasiklassischen Methoden zur Lösung des hier beschriebenen Problems kurz diskutiert. Dabei wird auch die Eilenberger-Gleichung besprochen, aus der man unter bestimmten Voraussetzungen ein System gekoppelter Riccati-Gleichungen (2.7, 2.8) herleiten kann. Die Lösung dieses Systems für ein konstantes Magnetfeld wurde von Froitzheim [19] behandelt. Eine Lösung für ein allgemeines Magnetfeld wird in dieser Arbeit in Kapitel 6 hergeleitet.

Kapitel 3

Quasiklassische Methoden zur Beschreibung einer SHS - Schichtstruktur

In diesem Kapitel wird die quasiklassische Berechnung des Josephson-Stroms für einen SHS-Kontakt zusammenfassend dargestellt. In [19] werden quasiklassische Methoden, die zur Beschreibung der Trajektorien von Quasiteilchen geeignet sind, ihre Herleitung und ihre Gültigkeit für verschiedene Energie- bzw. Temperaturbereiche diskutiert. An dieser Stelle möchte ich mich hauptsächlich auf die Theorie konzentrieren, die zu einer direkten Lösung des hier gestellten Problems führt. Aus diesem Grund sei für eine detaillierte Darstellung nochmals auf die oben genannte Referenz und die darin angegebene Literatur verwiesen.

Die Theorie bietet drei verschiedene Möglichkeiten zur Behandlung von Supraleitern im quasiklassischen Limes. Der Begriff quasiklassischer Limes bedeutet $k_F \xi \gg 1$, wobei k_F der Fermi-Impuls und ξ die Kohärenzlänge ist. Zum einen die Ginzburg-Landau-Methode, die Gorkov später aus der mikroskopischen Theorie unter der Annahme, daß $\frac{\Delta}{(k_B T_c)} \ll 1$ gilt, hergeleitet hat. Die Ginzburg-Landau-Theorie ist jedoch für die Betrachtung von SHS-Kontakten über den gesamten Temperaturbereich, in dem Supraleitung auftritt, nicht ausreichend, da sie eigentlich nur für die Bereiche des Phasenraums gilt, die nahe an der Phasenübergangsgrenze zum normalleitenden Metall liegen. Im Bereich sehr

tiefer Temperaturen treten im Supraleiter-Halbleiter-Supraleiter Kontakt die interessanten Effekte auf, die ihn von einem Supraleiter-Isolator-Supraleiter Kontakt unterscheiden. Weil aber in diesem Fall nur die allerniedrigsten Energieniveaus eine Rolle spielen, liefert diese theoretische Behandlung somit keine realistischen Ergebnisse.

Die Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen (BdG-Gleichungen) sind ein weiterer Ansatz zur Lösung des Schichtstruktur-Problems. Durch eine WKB-Näherung ist es zwar möglich, diese Theorie weiter zu vereinfachen, aber leider hat diese Methode den Nachteil, daß sie letztendlich zur Lösung eines Eigenwertproblems führt, bei dem zur Berechnung von physikalischen Meßgrößen über sehr viele Wellenfunktionen summiert (integriert) werden muß. Die weiterhin notwendige Voraussetzung, daß sich das betrachtete System im thermischen Gleichgewicht befinden muß, ist für die Problemstellung dieser Arbeit gewährleistet.

Die dritte Methode, welche den zentralen Ansatz für die vorliegende Arbeit darstellt, ist auf den Eilenberger-Gleichungen aufgebaut. Die Eilenberger-Gleichungen erhält man dadurch, daß man die Dyson-Gleichung in zwei Bereiche aufteilt: einen Hoch- und einen Niederenergiebereich [28]. Die daraus abgeleiteten Gleichungen für den hier relevanten Niederenergiebereich sind eben jene Eilenberger-Gleichungen. N. Schopohl zeigt [30], daß es möglich ist, die Lösung der Eilenberger-Gleichungen auf die Lösung zweier nichtlinearer Differentialgleichungen vom Riccati-Typ zurück zuführen. Das heißt, es muß kein Eigenwertproblem wie bei den BdG-Gleichungen gelöst werden, sondern die Lösung eines Anfangswertproblems führt hier mit einem vergleichbar geringen Aufwand zum Ziel. Somit ist diese Methode auch speziell für numerische Lösungsansätze sehr gut geeignet.

Im Folgenden möchte ich kurz auf die BdG-Gleichungen eingehen, da sie bei den Ausführungen zur Andreev-Reflektion benötigt werden. Im Anschluß daran, wird die Beschreibung des Effekts der Wirbelstrombildung durch Andreev-Reflektion in der Halbleiterbarriere mit Hilfe der -Gleichungen diskutiert, wobei der Schwerpunkt hierbei auf den angesprochenen Umformungen zu Differentialgleichungen vom Riccati-Typ liegen soll [30].

3.1 Die Bogoliubov-de Gennes Gleichungen

Die BCS-Theorie [31] beschreibt die Supraleitung für Elektronen unter Berücksichtigung der Wechselwirkung über Phononen mit folgendem Hamiltonoperator:

$$H = \sum_k \xi_k (c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} + c_{k\downarrow}^\dagger c_{k\downarrow}) + \Delta c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger + \Delta^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}, \quad (3.1)$$

wobei für das Paarpotential gilt:

$$\Delta = g \sum_k \langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle \quad g > 0. \quad (3.2)$$

Die BCS-Wechselwirkungskonstante g charakterisiert die Bindung der einzelnen Elektronen zu Cooper-Paaren. Da das System translationsinvariant ist (Jelliummodell), ist eine einfache Darstellung im Impulsraum gewährleistet. Die Bloch-Energie ξ_k mißt man bezüglich der Fermienergie, welche bei tiefen Temperaturen dem chemischen Potential entspricht. Für die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gelten die üblichen Vertauschungsrelationen:

$$\{c_{k\sigma}^\dagger, c_{k'\sigma'}\} = \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (3.3)$$

$$\{c_{k\sigma}^\dagger, c_{k'\sigma'}^\dagger\} = \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}\} = 0. \quad (3.4)$$

Für eine schwache Wechselwirkung zwischen den Elektronen ist es gerechtfertigt, diese als Punktwechselwirkung in Meanfield-Näherung anzunehmen. Bei der Mittelung werden Terme, die proportional zu $c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger$ und zu $c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}$ sind, explizit berücksichtigt. Ihr Vorfaktor stellt das für die Supraleitung entscheidende Paarpotential Δ dar. Terme, welche eine Proportionalität zur Teilchenzahl aufweisen, ergeben lediglich eine Renormierung des chemischen Potentials.

Bogoliubov [32] und Valatin [33] diagonalisierten den BCS-Hamiltonoperator Gl. (3.1), indem sie folgende Transformation benutzten:

$$\gamma_{k\uparrow}^\dagger = u_k c_{k\uparrow}^\dagger + v_k c_{-k\downarrow} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{-k\downarrow}^\dagger = u_k c_{-k\downarrow}^\dagger - v_k c_{k\uparrow}, \quad (3.6)$$

wobei die Normierungsbedingung

$$|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1 \quad (3.7)$$

gilt. In der ortsabhängigen Darstellung gilt für den BCS-Hamiltonoperator aus Gl. (3.1):

$$H = \int d\mathbf{r} \left[\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) H_e(\mathbf{r}) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r})^* \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right], \quad (3.8)$$

wobei das Paarpotential Δ folgendermaßen aussieht:

$$\Delta(\mathbf{r}) = g \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (3.9)$$

Der effektive Hamiltonoperator H_e ist gegeben durch:

$$H_e = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 - \mu + \phi(\mathbf{r}), \quad (3.10)$$

mit den üblichen Bezeichnungen von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ für das Vektorpotential, $\phi(\mathbf{r})$ für das skalare Potential und μ für das chemische Potential. Durch eine entsprechende ortsabhängige Bogoliubovtransformation erhält man schließlich ein Eigenwertproblem für die Koeffizienten $u(\mathbf{r})$ und $v(\mathbf{r})$. Die Bogoliubov-de Gennes Gleichungen lauten somit [34]:

$$E_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_e & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -H_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

E_n sind die Eigenenergien der Funktionen $u_n(\mathbf{r})$ und $v_n(\mathbf{r})$, gemessen bezüglich der Fermienrgie E_F .

Um eine anschauliche Bedeutung der Wellenfunktionen $u_n(\mathbf{r})$ und $v_n(\mathbf{r})$ zu gewinnen, betrachtet man den Grenzfall für verschwindendes Paarpotential, man betrachtet also einen Normalleiter. Die Gleichungen entkoppeln (3.11) somit, und es bleiben folgende Relationen bestehen:

$$E_n u_n(\mathbf{r}) = H_e u_n(\mathbf{r}) \quad (3.12)$$

$$-E_n v_n(\mathbf{r}) = H_{-e} v_n(\mathbf{r}). \quad (3.13)$$

Die Funktion $u_n(\mathbf{r})$ ist die Wellenfunktion eines elektronenartigen Quasiteilchens (mit Energie oberhalb der Fermienergie), und die Funktion $v_n(\mathbf{r})$ beschreibt ein lochartiges Quasiteilchen (mit einer Energie unterhalb der Fermienergie).

Bislang wurden noch alle möglichen Trajektorien der Quasiteilchen berücksichtigt. Bei der (quasiklassischen) WKB-Näherung,

$$\begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \exp(i\mathbf{k}_F \cdot \mathbf{r}\tau_3) \begin{pmatrix} \eta(\mathbf{r}) \\ \zeta(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

variieren die Funktionen $\eta(\mathbf{r})$ sowie $\zeta(\mathbf{r})$ nur langsam mit dem Ort. Somit kann man die zweiten Ableitungen nach der Ortskoordinate vernachlässigen. Anschaulich gesprochen ist dies gleichbedeutend damit, daß keine Kräfte auf die Quasiteilchen wirken und sie sich somit auf geraden Trajektorien bewegen. Das angelegte Magnetfeld ändert also nicht die Richtung, sondern nur die Phase der Quasiteilchen. Man erhält nun für die WKB-BdG-Gleichungen folgende Relation [35]:

$$-i\hbar\mathbf{v}_F \cdot \nabla \begin{pmatrix} \eta(\mathbf{r}) \\ \zeta(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_F & -\Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -[E + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_F] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(\mathbf{r}) \\ \zeta(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

3.2 Die Gorkov-Gleichungen

Für die Herleitung der Gorkov-Gleichungen [36] benutzt man den effektiven Hamiltonoperator:

$$H = \int d\mathbf{r} \left[\sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) H_e(\mathbf{r}) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right]. \quad (3.16)$$

Laut Definition gilt für die Heisenbergfeldoperatoren mit imaginärer Zeit:

$$\psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}, \tau) := \exp\left(\frac{K\tau}{\hbar}\right) \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{K\tau}{\hbar}\right) \quad (3.17)$$

$$\psi_{\sigma}(\mathbf{r}, \tau) := \exp\left(\frac{K\tau}{\hbar}\right) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{K\tau}{\hbar}\right), \quad (3.18)$$

wobei $K = H - \mu N$ gilt, mit μ dem chemischen Potential und N dem Teilchenzahloperator. Damit ergeben sich nun die Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren zu:

$$\begin{aligned} \hbar\partial_\tau\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau) = & -\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \mu\right]\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau) \\ & +\Delta(\mathbf{r})\psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}, \tau) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \hbar\partial_\tau\psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}, \tau) = & +\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \mu\right]\psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}, \tau) \\ & +\Delta^*(\mathbf{r})\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Für spinunabhängiges Wechselwirkungspotential und schwache Magnetfelder ($\mu_0 H \ll \Delta$) definiert man die Greensfunktion G und die anormale Greensfunktion F wie folgt:

$$G(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'\tau') = -\langle T_\tau[\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau)\psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}', \tau')] \rangle, \quad (3.21)$$

$$F(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'\tau') = -\langle T_\tau[\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau)\psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}', \tau')] \rangle, \quad (3.22)$$

wobei T_τ der Wicksche Zeitordnungsoperator bezüglich der imaginären Zeit τ ist. Bestimmt man nun mit Hilfe der Bewegungsgleichungen für die Fermionen-erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die Bewegungsgleichung für die Greensfunktion, so erhält man die Gorkov-Gleichungen in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} -\hbar\partial_\tau - \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \mu & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -\hbar\partial_\tau + \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'\tau') & F(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'\tau') \\ F^\dagger(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'\tau') & -G(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'\tau') \end{pmatrix} = \hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(\tau - \tau') \cdot \hat{1}. \quad (3.23)$$

Für das Paarpotential $\Delta(\mathbf{r}, 0^+)$ gilt:

$$\Delta(\mathbf{r}, 0^+) = gF(\mathbf{r}, \tau^+; \mathbf{r}, \tau), \quad (3.24)$$

wobei τ^+ infinitesimal größer als τ ist.

Über die Maxwell-Relation $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$ ergibt sich der Strom in Abhängigkeit der Greensfunktion aus der Gorkov-Gleichung:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \left[\frac{\hbar e}{im} (\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'}) G(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'\tau') - \frac{2e^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'\tau') \right]_{\mathbf{r}'\tau' \rightarrow \mathbf{r}\tau}. \quad (3.25)$$

Die Spinentartung schlägt sich im Faktor zwei vor dem Vektorpotential auf der rechten Seite nieder. Im folgenden führt man eine Fouriertransformation bezüglich des Fourierpaares ϵ_n und τ durch:

$$\hat{G}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', 0) = \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon_n) \exp\left(-i \frac{\epsilon_n}{\hbar} \tau\right), \quad (3.26)$$

$$\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon_n) = \frac{1}{2} \int_{-\hbar/(k_B T)}^{\hbar/(k_B T)} d\tau \exp\left(i \frac{\epsilon_n}{\hbar} \tau\right) \hat{G}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', 0). \quad (3.27)$$

Dabei sind die $\epsilon_n = \pi k_B T (2n+1)$ mit $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ die sogenannten Matsubara-Frequenzen. Daraus ergibt sich nun die Bewegungsgleichung für die fourier-transformierten Größen:

$$\begin{pmatrix} i\epsilon_n - \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \mu & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & i\epsilon_n + \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \mu \end{pmatrix} \cdot \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon_n) = \hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{1}. \quad (3.28)$$

3.3 Die Eilenberger-Gleichungen

3.3.1 Herleitung aus der quasiklassischen Greensfunktion

Die quasiklassische Näherung besagt, daß bei einem Fermionensystem die physikalischen Größen, beispielsweise der Ordnungsparameter und das Vektorpotential, auf einer viel größeren Länge variieren, als der Fermiwellenlänge. \hat{G} als

Funktion von \mathbf{r} und \mathbf{r}' ist deshalb genau $\exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_{12})$, multipliziert mit einer langsam veränderlichen Funktion in den beiden Koordinaten [37], wobei \mathbf{r}_{12} der Relativkoordinate entspricht. Mit der Schwerpunktskoordinate

$$\mathbf{R} = \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)}{2} \quad (3.29)$$

und der Relativkoordinate

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (3.30)$$

definiert man nun die Wignertransformation:

$$\hat{G}(\mathbf{p}, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{r}_{12} \hat{G}\left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_{12}, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r}_{12}\right) \exp\left(-i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_{12}}{\hbar}\right), \quad (3.31)$$

wobei \mathbf{p} wiederum der Relativimpuls ist. Da im Folgenden nur noch die Schwerpunktskoordinate \mathbf{R} auftritt, wird diese fortan wieder mit \mathbf{r} benannt. Aus Gl. (3.31) ergibt sich die Wignertransformierte der Gorkov-Gleichung zu:

$$\left[i\epsilon_n \tau_3 - \frac{1}{2m} \left(p - \tau_3 \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \mu + \begin{pmatrix} 0 & -\Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix} \right] \star \tau_3 \hat{G}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \epsilon_n) = 1, \quad (3.32)$$

wobei für das \star -Produkt folgende Definition gilt:

$$A \star B = A(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \exp \left[\frac{i}{2} \hbar (\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{r}} \overrightarrow{\partial}_{\mathbf{p}} - \overleftarrow{\partial}_{\mathbf{p}} \overrightarrow{\partial}_{\mathbf{r}}) \right] B(\mathbf{p}, \mathbf{r}). \quad (3.33)$$

Aus Gl. (3.32) und dem komplex konjugierten derselben Gleichung erhält man durch Subtraktion eine \star -Kommutatorgleichung:

$$\left[\left(i\epsilon_n \tau_3 - \frac{1}{2m} \left[p - \tau_3 \frac{e}{c} \mathbf{A} \right]^2 + \mu + \begin{pmatrix} 0 & -\Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix} \right) \star \tau_3 \hat{G}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \epsilon_n) \right] = 0. \quad (3.34)$$

Diese Gleichung ist noch exakt. Eine Entwicklung des Kommutators nach \hbar ergibt in linearer Ordnung:

$$[A \star B] \simeq [A, B] + \frac{i}{2} \hbar [A \overleftarrow{\partial}_{\mathbf{r}} \overrightarrow{\partial}_{\mathbf{p}} - \overleftarrow{\partial}_{\mathbf{p}} \overrightarrow{\partial}_{\mathbf{r}} B]. \quad (3.35)$$

Vernachlässigt man nun die Ortsableitung der Potentiale (da diese sich nur sehr schwach im Ort ändern sollen), so gelangt man nach einigen weiteren Schritten zu folgender Näherung für die Kommutatorgleichung:

$$\begin{aligned}
& -i\hbar \frac{\mathbf{p}}{m} \nabla_{\mathbf{r}} \tau_3 \hat{G}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \epsilon_n) = \\
& \left[\left(i\epsilon_n \tau_3 + \tau_3 \frac{e \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}}{c} + \begin{pmatrix} 0 & -\Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix} \right), \tau_3 \hat{G}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \epsilon_n) \right]. \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Durch diese Näherung bewegen sich die Quasiteilchen nun auf geraden Trajektorien, da die Kraftterme (z.B. $[\mathbf{A}(\mathbf{r}) \overleftarrow{\partial}_{\mathbf{r}}]$) vernachlässigt werden. Das Magnetfeld wirkt sich also nicht auf die Bahn der Quasiteilchen aus, sondern ausschließlich auf die Phase der Wellenfunktion. In Gl. (3.36) hängt kein Term mehr stark vom Impuls ab, nur die Greensfunktion besitzt bei $\mathbf{p} = \mathbf{p}_F$ einen Peak. Somit kann man überall \mathbf{p} durch \mathbf{p}_F ersetzen.

Alle physikalischen Größen berechnen sich in dieser Näherung aus der quasiklassischen Greensfunktion \hat{g} [38]:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \epsilon_n) & := \begin{pmatrix} g(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \epsilon_n) & f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \epsilon_n) \\ f^\dagger(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \epsilon_n) & -g(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \epsilon_n) \end{pmatrix} \\
& = \int d\xi_p \tau_3 \hat{G}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \epsilon_n). \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Auf Grund der speziellen \mathbf{p} Abhängigkeit läßt sich die Integration über ξ ausführen, und man gelangt somit schließlich zu den Eilenberger-Gleichungen [38, 39]:

$$\begin{aligned}
& -i\hbar \mathbf{v}_F \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \hat{g}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \epsilon_n) = \\
& \left[\left(i\epsilon_n \tau_3 + \tau_3 \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_F \tau_3 + \begin{pmatrix} 0 & -\Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix} \right), \hat{g}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \epsilon_n) \right]. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich (nach Summation über beide Spinrichtungen) das Paarpotential zu

$$\Delta(\mathbf{r}) = g \int_{\text{FS}} d\mathbf{p}_F N(\mathbf{p}_F) \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{|\epsilon_n| < \epsilon_c} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_F, i\epsilon_n) \quad (3.39)$$

und der Quasiteilchenstrom zu

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = 2 \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\epsilon_n} \int_{\text{FS}} d\mathbf{p}_F \mathbf{v}_F g(\mathbf{r}, \mathbf{p}_F, i\epsilon_n). \quad (3.40)$$

\int_{FS} bedeutet Integral über die Fermi-Oberfläche. Dabei werden die quasiklassischen normalen und anormalen Greensfunktionen g und f völlig analog zu Gl. (3.23) bestimmt.

3.3.2 Umformung der Eilenberger-Gleichungen

In [30] wurde gezeigt, daß es möglich ist, die Eilenberger-Gleichungen so umzuformulieren, daß sich das Lösen eines komplizierten Systems gekoppelter Differentialgleichungen mit Kommutatorstruktur erübrigt. Stattdessen erhält man ein System von gekoppelten Riccati-Gleichungen, die als Anfangswertproblem gelöst werden.

Es ist hervorzuheben, daß bei den Eilenberger-Gleichungen lediglich die Ableitung in Richtung der Fermi-Geschwindigkeit relevant ist. Somit macht es Sinn, vom Laborsystem (x,y,z) in ein Koordinatensystem (X,Y,Z) zu transformieren, wobei im neuen System die X -Achse in Richtung der Fermi-Geschwindigkeit zeigt. Die Koordinatentransformation soll an anderer Stelle (s. Kapitel 6.1) noch genauer besprochen werden. Vorweg sei jedoch erwähnt, daß die Richtungsableitung $\mathbf{v}_F \cdot \nabla$ in die gewöhnliche Ableitung $v_F \partial_X$ übergeht.

Somit ergibt sich für die physikalischen Größen im neuen System:

$$\Delta(X) = \Delta(\mathbf{R}(X)), \quad (3.41)$$

$$i\tilde{\epsilon}_n(X) = i\epsilon_n + \mathbf{A}(\mathbf{R}(X)) \cdot \mathbf{v}_F, \quad (3.42)$$

$$\hat{g}(X) = \hat{g}(\mathbf{R}(X), \mathbf{p}_F, i\epsilon_n). \quad (3.43)$$

Um die Eilenberger-Gleichung zu vereinfachen muß man beachten, daß die quasiklassische Greensfunktion spurlos ist und sich deshalb nach der Basis der spurlosen Paulimatrizen τ_1, τ_2, τ_3 oder der Linearkombinationen entwickeln läßt:

$$\hat{K}_3 = \frac{1}{2}\tau_3, \quad (3.44)$$

$$\hat{K}_\pm = -\frac{i}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2). \quad (3.45)$$

Damit gilt für die Eilenberger-Gleichung:

$$\begin{aligned} \hbar v_F \partial_X \hat{g}(X) &= [\hat{D}(X), \hat{g}(X)] \\ &= [-2\tilde{\epsilon}_n(X)\hat{K}_3 + \Delta(X)\hat{K}_+ - \Delta^*(X)\hat{K}_-, \hat{g}(X)]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Betrachtet man das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \hbar v_F \partial_X \hat{F}(X) &= (-2\tilde{\epsilon}_n(X)\hat{K}_3 + \Delta(X)\hat{K}_+ - \Delta^*(X)\hat{K}_-)\hat{F}(X), \\ \hat{F}(0) &= \hat{F}_0, \end{aligned} \quad (3.47)$$

wobei F_0 eine noch nicht festgelegte Anfangsbedingung für das Fundamentalsystem \hat{F} darstellt, so gilt:

$$\hat{F}(X)\hat{F}^{-1}(X) = 1, \quad (3.48)$$

und

$$\hbar v_F \partial_X \hat{F}^{-1}(X) = -\hat{F}^{-1}(X)\hat{D}(X). \quad (3.49)$$

Aus der Lösung für \hat{F} läßt sich die Greensfunktion finden, welche die Normierungsbedingung

$$\hat{g}(X) = -i\pi \hat{F}(X) \cdot 2\hat{K}_3 \hat{F}^{-1}(X) \quad (3.50)$$

erfüllt. Parametrisiert man $\hat{F}(X)$ durch:

$$\hat{F}_a(X) = \exp[a_+(X)\hat{K}_+] \exp[a_3(X)\hat{K}_3] \exp[a_-(X)\hat{K}_-], \quad (3.51)$$

wobei die Funktionen $a_+(X)$, $a_3(X)$, $a_-(X)$ noch zu bestimmen sind, so ergibt sich durch Anwendung der Baker-Campbell-Hausdorff-Identität (B-C-H Identität) für \hat{g} :

$$\hat{g}(X) = -\pi i \begin{bmatrix} [1 - 2a_-(X) \exp[-a_3(X)]] \cdot 2\hat{K}_3 \\ +a_+(X) \cdot [a_-(X)a_+(X) \exp[-a_3(X)] - 1] \cdot 2\hat{K}_+ \\ +a_-(X) \exp[-a_X] \cdot 2\hat{K}_- \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Mit dem Ansatz Gl.(3.51) löst man für das Differentialgleichungssystem Gl. (3.47) und erhält durch Koeffizientenvergleich ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen für $a_{\pm}(X)$ und $a_3(X)$:

$$\partial_X a_3 - 2a_+ \exp[-a_3] \partial_X a_- = -\frac{2\tilde{\epsilon}_n}{\hbar v_F}, \quad (3.53)$$

$$\exp[-a_3] \partial_X a_- = -\frac{\Delta^*}{\hbar v_F}, \quad (3.54)$$

$$\partial_X a_3 - 2a_+ \exp[-a_3] \partial_X a_- = \frac{\Delta}{\hbar v_F}. \quad (3.55)$$

Drückt man a_3 und a_- durch die Lösung a_+ aus:

$$a_3(X) = -\frac{2}{\hbar v_F} [\tilde{\epsilon}_n X + \int_0^X ds \Delta^*(s) a_+(s)] + a_3(0), \quad (3.56)$$

$$a_-(X) = -\frac{1}{\hbar v_F} \int_0^X ds \Delta^*(s) \exp[a_3(s)] + a_-(0), \quad (3.57)$$

so muß noch die Riccati-Gleichung für a_+ gelöst werden:

$$\hbar v_F \partial_X a_+(X) + [2\tilde{\epsilon}_n + \Delta^*(X) a_+(X)] a_+(X) - \Delta(X) = 0. \quad (3.58)$$

Um den Lösungsweg zu vereinfachen, definiert man im Folgenden einen neuen Ansatz zum Lösen des Differentialgleichungssystems Gl. (3.47), wobei nun aus den Relationen der unphysikalischen Greensfunktion, welche die Normierungsbedingung nicht erfüllt, die physikalischen Lösungen hervorgehen:

$$\hat{F}_b(X) = \exp[b_-(X) \hat{K}_-] \exp[b_3(X) \hat{K}_3] \exp[b_+(X) \hat{K}_+]. \quad (3.59)$$

Die Funktionen b_3 , b_- und b_+ werden durch folgende Differentialgleichungen bestimmt:

$$\partial_X b_3 + 2b_- \exp[b_3] \partial_X b_+ = -\frac{2\tilde{\epsilon}_n}{\hbar v_F}, \quad (3.60)$$

$$\exp[b_3] \partial_X b_+ = \frac{\Delta}{\hbar v_F}, \quad (3.61)$$

$$\partial_X b_- + b_- \partial_X b_3 + b_-^2 \exp[b_3] \partial_X b_+ = -\frac{\Delta^\dagger}{\hbar v_F}. \quad (3.62)$$

Diese kann man wieder entkoppeln:

$$b_3(X) = -\frac{2}{\hbar v_F} [\tilde{\epsilon}_n(X) + \int_0^X ds \Delta(s) b_-(s)] + b_3(0), \quad (3.63)$$

$$b_+(X) = \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^X ds \Delta(s) \exp[-b_3(s)] + b_+(0). \quad (3.64)$$

Jetzt muß die Riccati-Gleichung für b_- gelöst werden:

$$\hbar v_F \partial_X b_-(X) - [2\tilde{\epsilon}_n + \Delta(X) b_-(X)] b_-(X) + \Delta^*(X) = 0. \quad (3.65)$$

Mit $\hat{F}_a(X)$ und $\hat{F}_b(X)$ lassen sich zwei Funktionen \hat{g}_a und \hat{g}_b definieren:

$$\hat{g}_a(X) = \hat{F}_a(X) \hat{K}_- \hat{F}_a^{-1}(X) \quad (3.66)$$

$$\hat{g}_b(X) = \hat{F}_b(X) \hat{K}_- \hat{F}_b^{-1}(X), \quad (3.67)$$

wobei $\hat{g}_{a,b}^2 = 0$ gilt.

Somit handelt es sich wieder um unphysikalische Lösungen der Eilenberger - Gleichungen. Wendet man erneut die B-C-H-Identität an, so ergibt sich:

$$\hat{g}_a(X) = \exp[-a_3](\hat{K}_- - 2a_+ \hat{K}_3 + a_+^2 \hat{K}_+) \quad (3.68)$$

$$\hat{g}_b(X) = \exp[b_3](\hat{K}_+ + 2b_- \hat{K}_3 + b_-^2 \hat{K}_-). \quad (3.69)$$

Unter der Annahme, daß man sich für $x \rightarrow \pm\infty$ im homogenen Supraleiter befindet, erhält man für $\hat{g}_{a,b}$ eine exponentiell wachsende Funktion:

$$\hat{g}_{a,b} \propto \exp \left[\pm \frac{2X}{\hbar v_F} \sqrt{\epsilon_n^2 + |\Delta|^2} \right]. \quad (3.70)$$

Wegen der Kommutatorstruktur der Eilenberger-Gleichung ist mit $\hat{g}_{a,b}$ auch der Kommutator von \hat{g}_a und \hat{g}_b eine Lösung, welche in diesem Fall beschränkt ist:

$$\begin{aligned} \hat{g}(X) &= [\hat{g}_a, \hat{g}_b] \quad (3.71) \\ &= \exp[b_3 - a_3] \cdot \begin{pmatrix} 1 - (a_+ b_-)^2 & 2i a_+ (1 + a_+ b_-) \\ -2i b_- (1 + a_+ b_-) & -1 + (a_+ b_-)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schopohl [30] hat gezeigt, daß $\hat{g}(X)$ die physikalische Lösung liefert:

$$\partial_X [(1 + a_+ b_-)^4 \cdot \exp[2(b_3 - a_3)]] = 0. \quad (3.72)$$

Mit der Normierungsbedingung $\hat{g}^2 = -\pi$ folgt bis auf das Vorzeichen:

$$\exp[2(b_3 - a_3)] = \frac{-i\pi}{(1 + a_+ b_-)^2}. \quad (3.73)$$

Für den Normalleiter wählt man die Lösung so, daß sie im Grenzfall verschwindenden Paarpotentials, mit der bekannten Lösung für den Normalleiter übereinstimmt,

$$\hat{g}(X) = -i\pi \operatorname{sign}(\epsilon_n) \tau_3. \quad (3.74)$$

Aus der Symmetrie für die quasiklassische Greensfunktion folgt, daß jede Summe über alle Matsubara-Frequenzen sich auf eine Summe über positive Matsubara-Frequenzen umschreiben läßt. Damit ist der Propagator nur noch für positive Matsubara-Frequenzen zu betrachten.

Aus den Lösungen der Riccati-Gleichungen bestimmt man den physikalischen Propagator:

$$\hat{g}(X) = -i\pi \frac{1}{(1 + a_+ b_-)} \cdot \begin{pmatrix} 1 - (a_+ b_-) & 2ia_+ \\ -2ib_- & -1 + (a_+ b_-) \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Aus der Forderung, daß für $x \rightarrow \pm\infty$ ein homogener Supraleiter vorliegt, folgen die Anfangswertbedingungen:

$$a_+(-\infty) = \frac{\Delta(-\infty)}{\epsilon_n + \sqrt{\epsilon_n^2 + |\Delta(-\infty)|^2}} \quad (3.76)$$

$$b_-(\infty) = \frac{\Delta^*(\infty)}{\epsilon_n + \sqrt{\epsilon_n^2 + |\Delta(\infty)|^2}}. \quad (3.77)$$

Weil die Lösungen des Anfangswertproblems numerisch stabil sind, ist es von Vorteil, anstelle der Eilenberger-Gleichungen das Riccati-Gleichungssystem als Anfangswertproblem zu lösen:

$$\hbar v_F \partial_X a_+ + [2\epsilon_n - \frac{ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_F + \Delta^*(X) a_+(X)] a_+(X) - \Delta(X) = 0 \quad (3.78)$$

$$\hbar v_F \partial_X b_- - [2\epsilon_n - \frac{ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_F + \Delta(X) b_-(X)] b_-(X) - \Delta^*(X) = 0. \quad (3.79)$$

Diese Riccati-Gleichungen sind unter folgender Eichtransformation invariant:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi \quad \Delta \rightarrow \Delta \exp\left[\frac{2ie}{\hbar c}\chi\right] \quad (3.80)$$

$$a \rightarrow a \exp\left[\frac{2ie}{\hbar c}\chi\right] \quad b \rightarrow b \exp\left[-\frac{2ie}{\hbar c}\chi\right]. \quad (3.81)$$

Die Symmetrie für die Koeffizienten a und b ergibt sich aus der Symmetrie für die quasiklassische Greensfunktion.

Bleibt schließlich noch die Frage der Anschlußbedingung an der Supraleiter-Halbleiter-Grenze zu klären. Der Rückstreukoeffizient durch Normalreflektion am Rand der Barriere berechnet sich wie folgt [40]:

$$R = \left(\frac{v_{\text{FSL}} - v_{\text{FHL}}}{v_{\text{FSL}} + v_{\text{FHL}}} \right)^2. \quad (3.82)$$

Dabei steht v_{FHL} für die Fermigeschwindigkeit im Halbleiter und v_{FSL} für die im Supraleiter. Durch Dotieren des Halbleiters erreicht man eine Angleichung der Fermigeschwindigkeit des Halbleiters an die des Supraleiters. Dadurch wird der Rückstreukoeffizient identisch Null, und die quasiklassische Greensfunktion kann stetig über den Kontakt angeschlossen werden [41], indem man a und b stetig über die Barriere fortsetzt.

In den folgenden Kapiteln wird das Eilenberger-Riccati-Verfahren zur Berechnung des Josephson-Stroms herangezogen.

Kapitel 4

Andreev-Reflektion

In einem Supraleiter-Halbleiter-Supraleiter Kontakt (SHS-Kontakt) lassen sich alle relevanten Effekte, insbesondere der Proximity-Effekt, die innerhalb der Barriere mit Transporteigenschaften verknüpft sind, auf die Andreev-Reflektion [42] der Quasiteilchen zurückführen, da beim Halbleiter Kopplungseffekte [22, 23], vergleichbar denen im Normalleiter, kaum eine Rolle spielen. An den Grenzen des Halbleiterbereichs existiert auch keine Coulomb-Barriere, an der Normalreflektion stattfinden könnte. Im Folgenden soll der Mechanismus der Andreev-Reflektion anschaulich erläutert werden:

Ein Quasiteilchen, das sich im Halbleiter in der Nähe der Grenzfläche zwischen Supraleiter und Halbleiter befindet, kann wegen der Energielücke des Supraleiters nur unter ganz bestimmten Bedingungen in den Supraleiter transportiert werden (vergleiche auch Abb. 4.1):

1. Der Anteil der Energie E_p des Teilchens, welcher die Bewegung in Richtung des Fermi - Wellenvektors \mathbf{k}_F charakterisiert, muß im Bereich der Energielücke des Supraleiters liegen.
2. Ist das Teilchen elektronenartig, so muß seine Energie E_p oberhalb der Fermienergie E_F liegen. Außerdem muß sich auf der Supraleiter-Seite ein Elektron im Grenzbereich befinden, damit überhaupt erst ein Cooper-Paar gebildet werden kann.

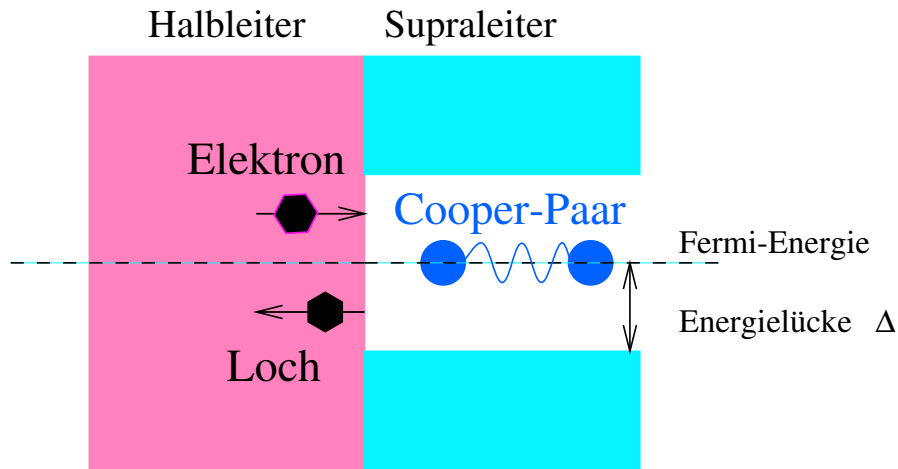


Abbildung 4.1: Stark schematisierte Darstellung der Andreev-Reflektion an einer Halbleiter-Supraleiter Grenzfläche. Nähere Erläuterung im Text.

3. Im Fall eines lochartiges Teilchen, muß dessen Energie E_p unterhalb der Fermienergie E_F liegen, und ein Cooper-Paar muß im Grenzbereich der Supraleiter-Seite aufgebrochen werden, damit das Loch rekombinieren kann.

Sind alle diese Bedingungen erfüllt, so kann ein Elektron unter Bildung eines Cooper-Paares vom Halbleiter in den Supraleiter transferiert werden. Ein Loch kann rekombinieren, indem ein Cooper-Paar im Supraleiter aufgebrochen wird und ein Elektron in den Halbleiter übergeht. Im Vergleich zur Normal-Reflektion, bei der die zur Grenzfläche orthogonale Impulskomponente einfach *umgeklappt* wird, wird bei der Andreev-Reflektion ein Elektron als ein Loch reflektiert, und umgekehrt. Das bedeutet, daß die Gruppengeschwindigkeit $v_g = \partial_x \epsilon(k)$ jeweils das Vorzeichen wechselt.

De facto ermöglicht die Andreev-Reflektion das sogenannte *Tunneln* eines Cooper-Paares vom Supraleiter der einen Seite über die Halbleiter-Barriere in den Supraleiter auf der anderen Seite.

Um die notwendigen Bedingungen für die Andreev-Reflektion zu gewährleisten, muß eine gewisse Ladungsträgerdichte im Grenzbereich des Supraleiters

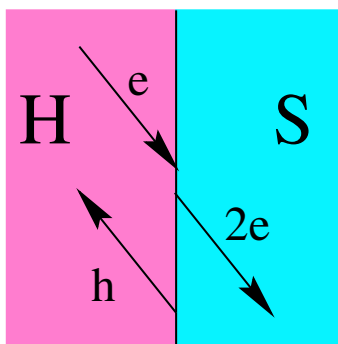


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung des mikroskopischen Prozesses der Andreev-Reflektion an einer Halbleiter-Supraleiter-Grenzfläche (H-S-Grenzfläche). Das Elektron ist durch e angedeutet, h steht für das Loch und das Cooper-Paar wird durch $2e$ symbolisiert. Wie aus diesem Bild sofort ersichtlich ist, ist die Trajektorie von Quasiteilchen über den gesamten Bereich der Barriere eine Gerade.

vorhanden sein. Dazu folgende Betrachtung: Bestimmt man die Wahrscheinlichkeitsstromdichte ρ_w

$$\rho_w = \sum_n \left(|u_n(\mathbf{r})|^2 + |v_n(\mathbf{r})|^2 \right), \quad (4.1)$$

und den Wahrscheinlichkeitsstrom j_w

$$j_w = \frac{\hbar}{2mi} \sum_n \left(u_n^*(\mathbf{r}) \nabla u_n(\mathbf{r}) - v_n^*(\mathbf{r}) \nabla v_n(\mathbf{r}) - u_n(\mathbf{r}) \nabla u_n^*(\mathbf{r}) + v_n(\mathbf{r}) \nabla v_n^*(\mathbf{r}) \right), \quad (4.2)$$

wobei $u(\mathbf{r})$ und $v(\mathbf{r})$ über die BdG-Gleichungen (3.11) definiert sind, so erhält man daraus die für den Strom als Erhaltungsgröße charakteristische Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t \rho_w + \nabla j_w = 0. \quad (4.3)$$

Betrachtet man die Ladungsdichte ρ_e

$$\rho_e = e \sum_n \left(|u_n(\mathbf{r})|^2 - |v_n(\mathbf{r})|^2 \right) \quad (4.4)$$

und den Ladungsstrom j_e

$$j_e = \frac{e\hbar}{2mi} \sum_n \left(u_n^*(\mathbf{r}) \nabla u_n(\mathbf{r}) + v_n^*(\mathbf{r}) \nabla v_n(\mathbf{r}) - u_n(\mathbf{r}) \nabla u_n^*(\mathbf{r}) - v_n(\mathbf{r}) \nabla v_n^*(\mathbf{r}) \right), \quad (4.5)$$

so ergibt sich die Ladungsbilanz unter Verwendung der BdG-Gleichungen wie folgt:

$$\partial_t \rho_e + \nabla j_e = \frac{4e}{\hbar} \text{Im} \left[\Delta(\mathbf{r}) u^*(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \right]. \quad (4.6)$$

Dies bedeutet: Die Ladung der Quasiteilchen ist keine Erhaltungsgröße. Den Ladungstransport kann man an der Grenzfläche des Supraleiters bereits als Cooper-Paar-Strom interpretieren, da dort ein endliches Paarpotential vorhanden ist. Das Eindringen der supraleitenden Korrelationen in die Halbleiter-Barriere wird als Proximity-Effekt bezeichnet (s. Abb.4.3). Somit ist aber genau die Gesamtladungsbilanz $\Delta q = 2e$ hergestellt, und dadurch die Ausgangsbedingung für Andreev-Reflektion.

Betrachtet man den Cooper-Paar-Strom \mathbf{J} ohne äußeres Magnetfeld, so erkennt man, welche Auswirkungen die Andreev-Reflektion auf das System hat. Es ist

$$\mathbf{J} = \frac{q\hbar}{m} \nabla \phi \quad (4.7)$$

direkt proportional zum Phasengradienten des Ordnungsparameters. Dies bedeutet, daß sich die Energielücke des Supraleiters – genauer deren Phase – durch die Andreev-Reflektion verändert. Dieser Effekt fällt kaum ins Gewicht, da sich sehr viele Cooper-Paare im Kondensat befinden, es sei denn, man sorgt *künstlich* für ein Ladungsungleichgewicht [43].

Wichtig für nachfolgende Betrachtungen ist, daß bei der Detektion des Quasiteilchenstroms im Magnetfeld elektronenartige und lochartige Teilchen tatsächlich an verschiedenen Stellen beobachtet werden, und somit unterscheidbar sind [44].

Bislang wurde in erster Linie die Andreev-Reflektion am Betrag des Paarpotentials behandelt. Es sei erwähnt, daß Andreev-Reflektion auch an der Phase auftreten kann, wie von N. Schopohl gezeigt wurde [45]. Dieser Effekt kommt z. B.

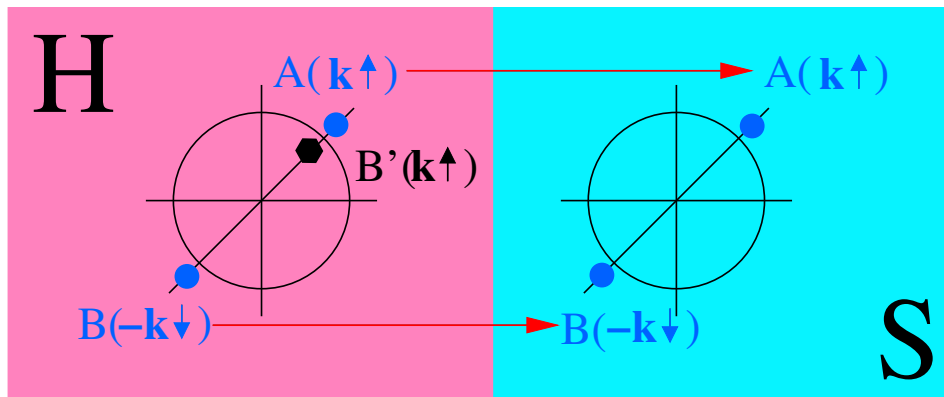


Abbildung 4.3: Proximity-Effekt: Supraleitende Korrelationen werden in den halbleitenden Bereich induziert. Dies ist auf die Kohärenz des Transports der Elektronen durch die H-S-Grenzfläche zurückzuführen. Wegen des Gaps im Quasiteilchenspektrum des Supraleiters (S) braucht ein Elektron A im Halbleiter (H) ein weiteres Elektron B mit entgegengesetztem Spin und Wellenvektor $-\mathbf{k}$ (liegt auf der Fermi-Oberfläche, symbolisiert durch einen Kreis), um mit ihm ein Cooper-Paar zu bilden und nach S zu kommen. Zur Kompensation des zweiten Elektrons B wird ein Loch B' in H zurückgelassen. Somit bedeutet Andreev-Reflektion, daß das Elektron kohärent in ein Loch B' umgewandelt wird, und ein Cooper-Paar in den Supraleiter übertragen wird.

in Supraleitern mit keramikartiger Struktur (Hochtemperatur-Supraleiter) zum Tragen. Diese besitzen eine durch ihre Struktur bedingte, ausgezeichnete Orientierung. Bei Verkipfung solcher Strukturen gegeneinander (Korngrenzen) detektiert man einen gänzlich anderen Strom. Dies kann man als Beweis dafür auffassen, daß der Ordnungsparameter in diesem Fall keine s-Wellen Symmetrie besitzt. Die Veränderung des Stromsignals, d. h. das Auftreten von Andreev-Reflektion anstatt eines kontinuierlichen Cooper-Paar Stroms, kann durch Änderung des Ordnungsparameters erklärt werden, welche durch eine richtungsabhängige Phase zustande kommt.

Kapitel 5

Das resultierende Magnetfeld

5.1 Fourier-Transformation des Josephson-Stroms

Unter der Annahme daß der Ladungstransport durch Andreev-Reflektion zustande kommt, wurde der Josephson-Strom eines langen SHS-Kontakts bei einem konstanten äußeren Magnetfeld analytisch bestimmt [19]. Um zu prüfen, ob dieser Strom der tatsächlichen physikalischen Situation entspricht, müssen Selbstkonsistenz-Rechnungen bzgl. der Maxwell-Theorie durchgeführt werden: durch iteratives Vorgehen läßt sich der Ausdruck für den betrachteten Strom bestätigen oder falsifizieren. Als erster analytischer Schritt hierzu wird der Josephson-Strom durch eine Fourier-Transformation in y -Richtung auf eine Form gebracht, die für die Berechnung des resultierenden Magnetfelds aus den Maxwell-Gleichungen günstig ist, da das Problem in y -Richtung periodische Randbedingungen besitzt.

$$\mathbf{J}(\phi, B; x, y; \varepsilon_n) = 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \mathbf{v}_{\mathbf{F}}(\theta) \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} \Delta_{\infty}^2 \cdot \frac{N_{FS} \sin \tilde{\phi}}{A^2 + \Delta_{\infty}^2 \cos \tilde{\phi}} \quad (5.1)$$

Der für die Transformation relevante, d. h. ortsabhängige Term sei hier mit j bezeichnet:

$$j(x, y, B, \phi; \varepsilon_n) := \Delta_\infty^2 \frac{\sin \tilde{\phi}}{A^2 + \Delta_\infty^2 \cos \tilde{\phi}}. \quad (5.2)$$

Alle weiteren Konstanten sowie die Fourier-Transformation selbst sind im Anhang A erklärt. Die transformierte Variable Q_y , der Fourier-Partner der Ortskoordinate y , ist definiert als:

$$Q_y := \frac{2\pi}{Y_P} n_y = \frac{4e}{\hbar c} BL n_y \quad \text{mit} \quad n_y \in \mathbb{Z}, \quad (5.3)$$

wobei Y_P die Periodenlänge der Flußwirbel in y -Richtung bezeichnet. Somit läßt sich j als folgende Fourier-Reihe schreiben:

$$j(x, y, B, \phi; \varepsilon_n) = \sum_{Q_y} e^{iQ_y y} c_{Q_y}(x; B, \phi; \varepsilon_n). \quad (5.4)$$

Die Fourier-Koeffizienten c_{Q_y} ergeben sich schließlich aus der inversen Fourier-Transformation zu:

$$c_{Q_y} = e^{-in_y(\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) x BL)} (-1) \int_0^{2\pi} \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} \cdot e^{in_y \tilde{\phi}} \cdot j(x, y(\tilde{\phi}); B, \phi; \varepsilon_n). \quad (5.5)$$

Um die Fourier-Koeffizienten zu berechnen, verwendet man den Residuensatz. Dafür benötigt man eine geeignete Parametrisierung des Integrationsweges, s. Abb. (5.1) in der komplexen Ebene um die Pole herum. Es wird folgende Parametrisierung gewählt:

$$z = e^{i\tilde{\phi}} \quad (5.6)$$

Für den fouriertransformierten Josephson-Strom gilt die im Anhang gezeigte Beziehung:

$$j^*(x, y; \phi, B; \varepsilon_n) \equiv j(x, y; \phi, B; \varepsilon_n). \quad (5.7)$$

Das bedeutet, der betrachtete Josephson-Strom ist rein reell. Dies ist für die nun folgende Berechnung der Fourier-Transformierten des resultierenden Magnetfelds von entscheidender Bedeutung.

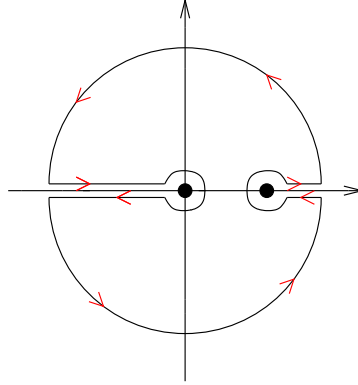


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung zur Anwendung des Residuensatzes. Gezeigt ist der benötigte Integrationsweg in der komplexen Ebene.

5.2 Magnetfeldberechnung aus der Maxwell-Gleichung

In diesem Abschnitt soll ein erster, analytischer, Schritt zur selbstkonsistenten Bestimmung des aus dem Josephson-Strom resultierenden Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}(x, y)$ gemacht werden. Der Index (1) bedeutet erste Iterationsstufe. Dazu verwendet man die im vorhergehenden Abschnitt berechnete Fourier-Transformierte des Stroms und erhält durch Lösen der Maxwell-Gleichung im Fourier-Raum die Fourier-Transformierte der durch die Wirbelströme in der Barriere verursachten Magnetfeld-Komponente $\mathbf{B}_{Q_y}^{(1)}(x)$ in z -Richtung. Es wird folgende Notation verwendet:

$$\mathbf{J} = J_x \hat{\mathbf{x}} + J_y \hat{\mathbf{y}} \quad \mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}} \quad B_z = \text{const} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{B}^{(1)}(x, y + Y_P) = B^{(1)}(x, y) \hat{\mathbf{z}} = \sum_{Q_y} e^{iQ_y y} B_{Q_y}^{(1)}(x). \quad (5.9)$$

Die detaillierte Herleitung mit der genauen Definition aller verwendeten Variablen befindet sich im Anhang B. Ausgehend von der Maxwell-Gleichung,

$$\mathbf{rot} \mathbf{B}^{(1)} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^{(0)}, \quad (5.10)$$

erhält man durch Bildung der Rotation auf beiden Seiten, und Fourier-Transformation bzgl. der periodischen Ortskoordinate y :

$$(-\partial_x^2 + Q_y^2)B_{Q_y}^{(1)}(x) = \frac{32\pi^2 e}{c} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} (\partial_x \cdot v_y - iQ_y \cdot v_x) \cdot c_{Q_y}. \quad (5.11)$$

Dabein gelten folgende Ersetzungen:

$$c_{Q_y} = -2\pi i \cdot d^{n_y} \cdot e^{-in_y \phi} \cdot e^{-in_y \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BLx}, \quad (5.12)$$

$$d = - \left[\frac{A^2}{\Delta_\infty^2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 - 1} \right]^{-1}. \quad (5.13)$$

Um die Betrachtungen zu vereinfachen, spalten wir den, für die Fourier-Transformation und die Rotation wichtigen, ortsabhängigen Anteil $b_{Q_y}^{(1)}(x)$ vom eigentlichen Magnetfeld - Term ab:

$$B_{Q_y}^{(1)}(x) = 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \cdot b_{Q_y}^{(1)}(x). \quad (5.14)$$

Somit kann man schreiben:

$$-\partial_x^2 \cdot b_{Q_y}^{(1)}(x) + Q_y^2 \cdot b_{Q_y}^{(1)}(x) = \frac{4\pi}{c} (\partial_x \cdot v_y - iQ_y \cdot v_x) \cdot c_{Q_y}(x; \phi, B; \theta). \quad (5.15)$$

Nun wird ein Exponentialansatz zur Lösung der Differentialgleichung Gl. (5.15) benutzt:

$$b_{Q_y}^{(1)}(x) = b_{n_y 0}^{(1)} \cdot e^{-in_y [\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) x BL]}. \quad (5.16)$$

Also ergibt sich für das fouriertransformierte Magnetfeld, nach zweimaliger Anwendung des Rotationsoperators, folgende Gleichung:

$$(-\partial_x^2 + Q_y^2)B_{Q_y}^{(1)}(x) = 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \cdot e^{-in_y (\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) x BL)} \cdot \frac{32\pi^2 e}{c^2 \hbar} BL d^{n_y} (\tan(\theta) v_y + v_x) \quad (5.17)$$

Für die Fourier-Transformierte $B_{Q_y}^{(1)}$ des resultierenden Magnetfelds ergibt sich folgender Ausdruck:

$$B_{Q_y}^{(1)} = 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \cdot \frac{1}{n_y} q^{n_y} (-1)^{\frac{2\pi^2 v_{F_x}}{\hbar} B L} \quad (5.18)$$

Um nun ein resultierendes Magnetfeld in realen Laborkoordinaten (x, y) zu erhalten, wird aus obiger Gleichung die Fourier-Transformierte errechnet und in das Laborsystem zurücktransformiert:

$$\mathbf{B}^{(1)}(x, y) = \sum_{n_y} e^{iQ_y y} B_{Q_y}(x). \quad (5.19)$$

Die erste Iterationsstufe des Selbstkonsistenz-Problems ergibt für das resultierende Magnetfeld folgende Relation:

$$B^{(1)}(x, y) = \frac{8\pi^3}{\hbar} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \frac{\cos \theta}{\frac{BL}{\hbar}} |\mathbf{v}_F| \ln(1 + d^2 - 2d \cos \tilde{\phi}). \quad (5.20)$$

Da der ursprünglich betrachtete Josephson-Strom reell ist, besitzt, wie hier gezeigt, auch das von ihm verursachte Magnetfeld nur einen Realteil. Da das Magnetfeld eine experimentell beobachtbare Größe ist, ist dies auch zwingend erforderlich.

Kapitel 6

Josephson-Strom in Abhängigkeit vom allgemeinen Magnetfeld

In diesem Kapitel wird der Josephson-Strom in Abhängigkeit von einem allgemeinen Magnetfeld hergeleitet. *Allgemein* heißt an dieser Stelle, daß das Magnetfeld in der (x, y) -Ebene veränderlich sein kann, aber weiterhin ausschließlich eine Komponente in z -Richtung besitzt und in dieser Richtung keine Abhängigkeit aufweisen darf. Damit läßt sich schreiben:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(x, y) \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Das Magnetfeld \mathbf{B} kann man als Rotation eines Vektorpotentials \mathbf{A} schreiben:

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}, \quad (6.2)$$

wobei eine Eichfreiheit für \mathbf{A} besteht. Im Folgenden wird immer die sogenannte Landau-Eichung benutzt. Das Vektorpotential läßt sich in dieser Eichung für die betrachtete experimentelle Anordnung in der Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

angeben. Aus Gl. (6.2) zusammen mit Gl. (6.3) folgt somit:

$$B_z = \partial_x A_y \quad (6.4)$$

Also läßt sich das Vektorpotential im Bereich der Barriere wie folgt schreiben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \int B_z(x, y) dx \\ 0 \end{pmatrix} A_y = \int B_z(x, y) dx \quad (6.5)$$

6.1 Transformation ins Fermi-System

Mit Hilfe einer Koordinatentransformation vom gewöhnlichen Ortsraum ($\hat{\mathbf{a}}$ und $\hat{\mathbf{b}}$) in ein neues System ($\hat{\mathbf{v}}$ und $\hat{\mathbf{u}}$) mit einer Ausrichtung entlang der Fermigeschwindigkeit \mathbf{v}_F :

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = X\hat{\mathbf{v}} + Y\hat{\mathbf{u}} \quad (6.7)$$

$$= r_a(X)\hat{\mathbf{a}} + r_b(X)\hat{\mathbf{b}}, \quad (6.8)$$

wobei $\hat{\mathbf{v}}$ immer in Richtung der Fermigeschwindigkeit \mathbf{v}_F weist. Mit Hilfe dieser Transformation, vergleiche auch Abb. 6.1, gelingt es, die Eilenberger-Gleichungen in eine Form zu bringen, in der sie lediglich X abhängen. Somit lassen sie sich zu gekoppelten Riccati-Differentialgleichungen vereinfachen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= \cos(\theta)\hat{\mathbf{a}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{b}}, \\ \hat{\mathbf{u}} &= -\sin(\theta)\hat{\mathbf{a}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{b}}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{v}}. \quad (6.10)$$

Wobei $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}\}$ das *Fermi-System* ist und $\{\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}\}$ das Laborsystem. Der Winkel θ ist der Winkel zwischen der Fermigeschwindigkeit und der \mathbf{x} -Richtung im Laborsystem. Also gilt:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

und für die Umkehrung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

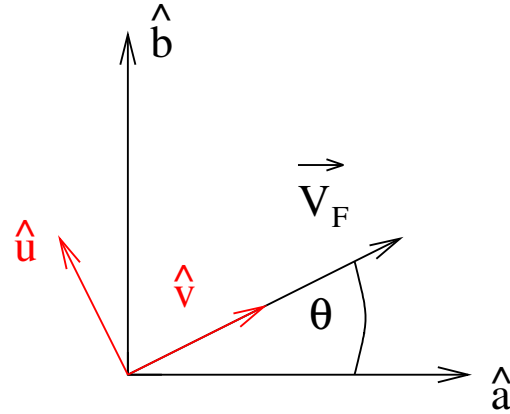


Abbildung 6.1: Darstellung der im Text beschriebenen Koordinatentransformation. Das Laborsystem ist durch die Vektoren \hat{a} und \hat{b} bezeichnet, wohingegen das neue Koordinatensystem durch die beiden Vektoren \hat{u} und \hat{v} charakterisiert ist. Der Winkel θ , ist der Winkel zwischen der Richtung der Fermigeschwindigkeit und der x -Richtung, d. h. entlang \hat{a} , im Laborsystem.

Somit wird aus der Richtungsableitung $\mathbf{v}_F \cdot \nabla$ der Eilenberger-Gleichungen eine gewöhnliche Ableitung:

$$\hbar \mathbf{v}_F \cdot \hat{g}(\mathbf{r}; \mathbf{p}_F, i\epsilon_n) = \hbar v_F \frac{\partial}{\partial X} \hat{g}(\mathbf{r}(X); \mathbf{p}_F, i\epsilon_n). \quad (6.13)$$

Das bisher zweidimensionale System reduziert sich also auf ein eindimensionales System, in Richtung der Fermigeschwindigkeit \mathbf{v}_F .

6.2 Die Lösung des Riccati-Gleichungssystems

Durch die Koordinatentransformation ist es gelungen, die Eilenberger-Gleichungen in ein Differentialgleichungssystem des Riccati-Typs zu überführen. Zu dessen Lösung geht man sinnvollerweise in eine reelle Eichung:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{r}) &= \tilde{a}(\mathbf{r}) \exp(i\phi(\mathbf{r})) \\ b(\mathbf{r}) &= \tilde{b}(\mathbf{r}) \exp(-i\phi(\mathbf{r})) \end{aligned} \quad (6.14)$$

über.

Nun ist zu lösen:

$$\begin{aligned} \hbar v_F \cdot \nabla \tilde{a}(\mathbf{r}) + \left[2\epsilon_n + 2i\hbar v_F \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{2} - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \right. \\ \left. + |\Delta(\mathbf{r})| \tilde{a}(\mathbf{r}) \right] \tilde{a}(\mathbf{r}) - |\Delta(\mathbf{r})| = 0, \end{aligned} \quad (6.15)$$

sowie

$$\begin{aligned} \hbar v_F \cdot \nabla \tilde{b}(\mathbf{r}) - \left[2\epsilon_n + 2i\hbar v_F \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{2} - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \right. \\ \left. + |\Delta(\mathbf{r})| \tilde{b}(\mathbf{r}) \right] \tilde{b}(\mathbf{r}) + |\Delta(\mathbf{r})| = 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Im halbleitenden Bereich der Junction gelten folgende Beziehungen:

$$\Delta(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.17)$$

Für den Halbleiter gilt dann (im neuen Koordinatensystem):

$$\hbar v_F \frac{\partial}{\partial X} \tilde{a}(X) + \left[2\epsilon_n + 2i\hbar \frac{e}{\hbar c} v_F A_y(X) \right] \tilde{a}(X) = 0 \quad (6.18)$$

$$\hbar v_F \frac{\partial}{\partial X} \tilde{b}(X) - \left[2\epsilon_n - 2i\hbar \frac{e}{\hbar c} v_F A_y(X) \right] \tilde{b}(X) = 0. \quad (6.19)$$

Man löst diese Differentialgleichungen nun als ein Anfangswertproblem, indem man annimmt, daß tief im Supraleiter die Lösungen $\tilde{a}(X)$ und $\tilde{b}(X)$ konstant seien. Speziell heißt das:

$$\tilde{a}(\infty) = \frac{\Delta_\infty}{\epsilon_n + \sqrt{\epsilon_n^2 + \Delta_\infty^2}} = \tilde{b}(-\infty). \quad (6.20)$$

Also gelte für \tilde{a} der Ansatz:

$$\tilde{a}(X) = \tilde{a}(\infty) e^{D_1(X)}, \quad (6.21)$$

wobei

$$D_1(X) = \int_0^X \left[-\frac{2\epsilon_n}{\hbar v_F} + \frac{2ie}{\hbar c} \sin(\theta) A_y(X') \right] dX'. \quad (6.22)$$

Im gewählten Koordinatensystem erfolgt die Integration immer entlang der Fermigeschwindigkeit, das heißt entlang der Trajektorie des Quasiteilchens:

$$\begin{aligned} D_1(X) &= -\frac{2\epsilon_n}{\hbar v_F} X + \frac{2ie}{\hbar c} \sin(\theta) \int_0^X A_y(X') dX' \\ &= -\frac{2\epsilon_n X}{\hbar v_F} + \frac{2ie}{\hbar c} \sin(\theta) \int_0^X \int_{-L}^x B_z dx dX'. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Letztendlich gilt somit:

$$a(X) = \tilde{a}(\infty) e^{D_1(X)} e^{i\phi(X)}, \quad (6.24)$$

mit oben angegebenem $D_1(X)$.

Die Betrachtungen für die zweite Differentialgleichung Gl. (6.19) bzw. auch Gl. (6.14) erfolgen analog. Der Ansatz lautet demzufolge:

$$\tilde{b}(X) = \tilde{b}(\infty) e^{D_2(X)}, \quad (6.25)$$

wobei D_2 gegeben ist durch:

$$D_2(X) = \int_X^0 \left[\frac{2\epsilon_n}{\hbar v_F} + \frac{2ie}{\hbar c} \sin(\theta) A_y(X') \right] dX'. \quad (6.26)$$

Die Berechnung von D_2 erfolgt analog zu D_1

$$\begin{aligned} D_2(X) &= -\frac{2\epsilon_n}{\hbar v_F} X + \frac{2ie}{\hbar c} \sin(\theta) \int_X^0 A_y(X') dX' \\ &= -\frac{2\epsilon_n X}{\hbar v_F} + \frac{2ie}{\hbar c} \sin(\theta) \int_X^0 \int_0^x B_z dx dX'. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Und auch für b gilt eine ähnliche Beziehung:

$$b(X) = \tilde{b}(\infty) e^{D_2(X)} e^{-i\phi(X)} \quad (6.28)$$

mit oben berechnetem $D_2(X)$.

An dieser Stelle ist es sinnvoll, sich nochmals die Beziehungen der Phase ϕ zu vergegenwärtigen. Aus der Gap-Funktion

$$\Delta = \begin{cases} \Delta_\infty \exp(i\phi_1) & ; \quad x \leq -L \\ 0 & ; \quad |x| < L \\ \Delta_\infty \exp(i\phi_2) & ; \quad x \geq L \end{cases}, \quad (6.29)$$

und der Bedingung für einen idealen Meißner-Effekt im Supraleiter:

$$J_S = \frac{e\hbar}{m}n_s\nabla\phi - \frac{2e}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r})n_s \equiv 0 \quad (6.30)$$

folgt:

$$\nabla\phi = \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (6.31)$$

Somit gilt für die Phase ϕ in den einzelnen Bereichen (unter Berücksichtigung der speziellen Form von $\mathbf{A} = (0, A_y, 0)$):

$$\text{im SL}_{\text{rechts}} : \quad \phi = \int_{y_0}^y \frac{2e}{\hbar c}A_y(\mathbf{r})dy + \phi_1 \quad (6.32)$$

$$\text{im SL}_{\text{links}} : \quad \phi = \int_{y_0}^y \frac{2e}{\hbar c}A_y(\mathbf{r})dy + \phi_2. \quad (6.33)$$

Daraus folgt die allgemeine Gap-Funktion:

$$\Delta = \begin{cases} \Delta_\infty \exp[-2\frac{ie}{\hbar c} \int_0^{-L} \int_{y_0}^y B_z(\mathbf{r})dx dy + i\phi_1] & ; \quad x \leq -L \\ 0 & ; \quad |x| < L \\ \Delta_\infty \exp[2\frac{ie}{\hbar c} \int_0^L \int_{y_0}^y B_z(\mathbf{r})dx dy + i\phi_2] & ; \quad x \geq L \end{cases} \quad (6.34)$$

Zurückgehend auf Gl. (6.24) bzw. auf Gl. (6.14) unter Berücksichtigung von Gl. (6.20) erhält man somit:

$$a(\mathbf{r}) = \frac{\Delta_\infty}{\epsilon_n + \sqrt{\epsilon_n^2 + \Delta_\infty^2}} \cdot \exp\left(-\frac{2\epsilon_n X}{\hbar v_F} + \frac{2ie}{\hbar c} \left[\sin(\theta) \int_0^X \int_0^x B_z(x, y) dx dX + \int_0^{-L} \int_{y_0}^{y(X_1)} B_z(x, y) dx dy \right] + i\phi_1\right). \quad (6.35)$$

Durch ähnliche Überlegungen gelangt man zu einem Ausdruck für b . Es gilt:

$$b(\mathbf{r}) = \frac{\Delta_\infty}{\epsilon_n + \sqrt{\epsilon_n^2 + \Delta_\infty^2}} \cdot \exp \left(-\frac{2\epsilon_n X}{\hbar v_F} + \frac{2ie}{\hbar c} \left[\sin(\theta) \int_X^0 \int_0^x B_z(x, y) dx dy - \int_0^L \int_{y_0}^{y(X_2)} B_z(x, y) dx dy \right] - i\phi_2 \right). \quad (6.36)$$

Dieser Ausdruck ist gültig für positive Werte der Fermigeschwindigkeit, d. h. $v_F > 0$. Anschaulich gesprochen ist dies gleichbedeutend damit, daß sich das Quasiteilchen auf seiner Trajektorie von *links nach rechts* bewegt.

Für den gesuchten Ausdruck $a \cdot b$, aus welchem sich letztendlich der Strom berechnen läßt, ergibt sich aus den Gleichungen Gl. (6.35) und Gl. (6.36) folgender Ausdruck:

$$a(\mathbf{r})b(\mathbf{r}) = \frac{\Delta_\infty^2}{(\epsilon_n + \sqrt{\epsilon_n^2 + \Delta_\infty^2})^2} \cdot \exp \left(-\frac{4\epsilon_n X}{\hbar v_F} + i\{\phi_1 - \phi_2 + \frac{2e}{\hbar c} \left[\int_0^{-L} \int_{y_0}^{y(X_1)} B_z(x, y) dx dy - \int_0^L \int_{y_0}^{y(X_2)} B_z(x, y) dx dy \right] \} \right). \quad (6.37)$$

Nun wird in das ursprüngliche Laborsystem zurück transformiert. Dieses Laborsystem wurde oben durch die Achsenabschnitte x und y entlang der Richtungen \hat{a} und \hat{b} beschrieben. Im vorliegenden Fall lautet die Transformationsvorschrift:

$$X = \frac{x}{\cos(\theta)}. \quad (6.38)$$

Damit läßt sich nun schließlich ein expliziter Ausdruck für den gesuchten Stromoperator bestimmen. Nach einiger Rechnung ergibt sich letztendlich folgende Beziehung für den Josephson-Strom über die Schichtstruktur bei einem allgemeinen äußeren Magnetfeld \mathbf{B} :

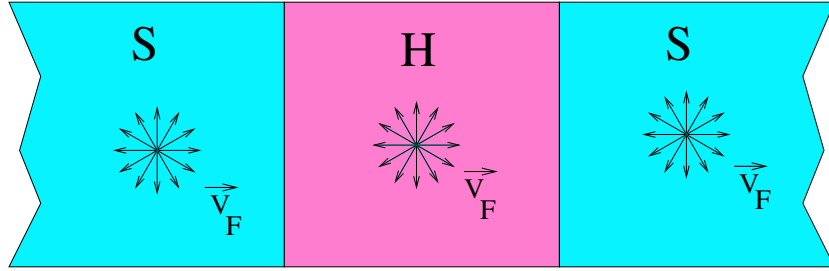


Abbildung 6.2: Diese Abbildung veranschaulicht, weshalb an jedem Punkt der Trajektorie der Quasiteilchen über alle Richtungen des Fermigeschwindigkeitsvektors \mathbf{v}_F summiert werden muß (Integration über θ). Mit Hilfe dieses Vorgehens wird sichergestellt, daß wirklich die Beiträge aller Quasiteilchen zum Strom erfaßt werden. Alle Quasiteilchen heißt hier, Quasiteilchen mit einer beliebigen (Richtung der) Fermigeschwindigkeit \mathbf{v}_F .

$$J(B(x, y)) = 8\pi e \int_{FS+} \frac{d\theta}{2\pi} |\mathbf{v}_F| \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\epsilon_n > 0} N_{FS} \sin(\tilde{\phi}) \frac{\Delta_\infty^2}{D}. \quad (6.39)$$

Dabei steht die Variable D für folgenden Ausdruck:

$$D = 2\epsilon_n^2 \cosh\left(\frac{4\epsilon_n L}{\hbar v_{F_x}}\right) + 2\epsilon_n \sqrt{\epsilon_n^2 + \Delta_\infty^2} \sinh\left(\frac{4\epsilon_n L}{\hbar v_{F_x}}\right) + \Delta_\infty^2 \cosh\left(\frac{4\epsilon_n L}{\hbar v_{F_x}}\right) + \Delta_\infty^2 \cos(\tilde{\phi}) \quad (6.40)$$

wobei

$$\tilde{\phi} = \phi_1 - \phi_2 + \left\{ \frac{2e}{\hbar c} \left(\int_0^{-L} \int_{y_0}^{y(X_1)} B_z(x, y) dx dy - \int_0^L \int_{y_0}^{y(X_2)} B_z(x, y) dx dy \right) \right\}. \quad (6.41)$$

In Gl. (6.41) entspricht der Ausdruck in den geschweiften Klammern gerade $2\pi \frac{\Phi(x, y)}{\Phi_0}$, wobei $\Phi(x, y)$ den magnetischen Fluß durch den Barrierenbereich und Φ_0 das magnetische Flußquant bezeichnet. Hier ist der Strom in Abhängigkeit vom magnetischen Fluß in der Probe angegeben, dieser Fluß wird in Vielfachen des Flußquants gemessen.

Der Stromausdruck in Gl.(6.39) beschreibt den Josephson-Strom für ein allgemeines, ortsabhängiges Magnetfeld. D. h. es können auch Stromverteilungen für räumlich variierende Magnetfelder berechnet werden. Dies ermöglicht in Verbindung mit den Maxwell-Beziehungen die selbstkonsistente Berechnung des Josephson-Stroms (s. Kapitel 8).

Kapitel 7

Strom-Charakteristik im Bereich der Barriere

7.1 Strom-Phasenbeziehung in Theorie und Experiment

Die Strom-Phasenbeziehung (CPR) im SNS-Kontakt, wie auch im SHS-Kontakt, steht seit langem im Blickfeld des Interesses [46]. Betrachtet man die Temperaturabhängigkeit der CPR, so ergibt sich aus der quasiklassischen Berechnung der folgende analytische Ausdruck des Josephson-Stroms:

$$\mathbf{J}(\phi, B; x, y; \varepsilon_n) = 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \mathbf{v}_{\mathbf{F}}(\theta) \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} \Delta_{\infty}^2 \cdot \frac{N_{FS} \sin \tilde{\phi}}{A^2 + \Delta_{\infty}^2 \cos \tilde{\phi}} \quad (7.1)$$

Dabei ist die effektive Phase

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{4e}{\hbar c} BL(y - x \tan \theta). \quad (7.2)$$

Zusätzlich zur Abhängigkeit vom äußeren Magnetfeld beinhaltet $\tilde{\phi}$ einen Zusammenhang mit der Variation des Orts innerhalb der Barriere.

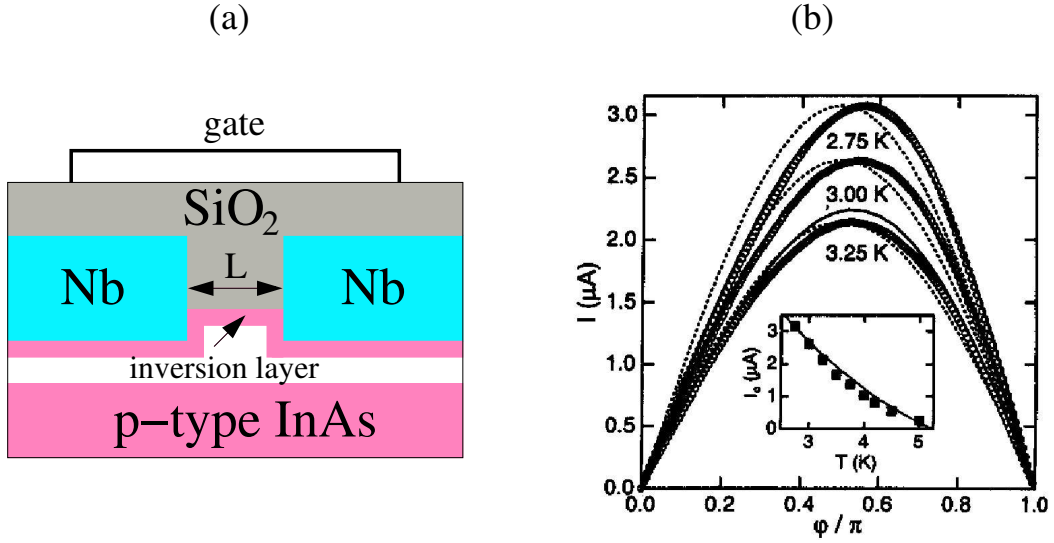


Abbildung 7.1: (a) Schematischer Querschnitt des Josephson-Kontakts, der in [20] benutzt wurde, um die Strom-Phasenbeziehung im mesoskopischen SHS-Kontakt ohne äußeres Magnetfeld zu messen.

(b) Vergleich der experimentell gemessenen Strom-Phasen-Beziehung (Kreise) mit einer sinusförmigen CPR (gestrichelte Kurve). Grafik übernommen aus [20].

Der temperaturabhängige Anteil des Nenners Gl.(7.1) beschreibt das Tunneln der Cooper-Paare:

$$\begin{aligned}
 A^2 = 2\varepsilon_n^2 \cosh\left(\frac{4\varepsilon_n L}{\hbar v_{F_x}}\right) &+ 2\varepsilon_n \sqrt{\varepsilon_n^2 + \Delta_\infty^2} \sinh\left(\frac{4\varepsilon_n L}{\hbar v_{F_x}}\right) \\
 &+ \Delta_\infty^2 \left(\cosh\left(\frac{4\varepsilon_n L}{\hbar v_{F_x}}\right)\right). \quad (7.3)
 \end{aligned}$$

Besonders für kleine Temperaturen zeigt diese Relation eine signifikante Abweichung vom Sinus-Verhalten, die durch die zur Temperatur direkt proportionalen Energieskala im Nenner Gl.(7.1) zustande kommt (s. Abb. 7.2). Diese Abweichung vom Sinus-Verhalten wird durch neueste Experimente [20, 21] bestätigt (s. Abb. 7.1).

Im Gegensatz zu den theoretischen Erklärungen in den oben angegebenen Referenzen, enthält die hier erläuterte quasiklassische Herleitung keine Fitting-Parameter. Wird an den Kontakt ein äußeres Magnetfeld senkrecht zu dessen Ebene angelegt, so erhält man eine effektive Phase $\tilde{\phi}$ im Bereich der

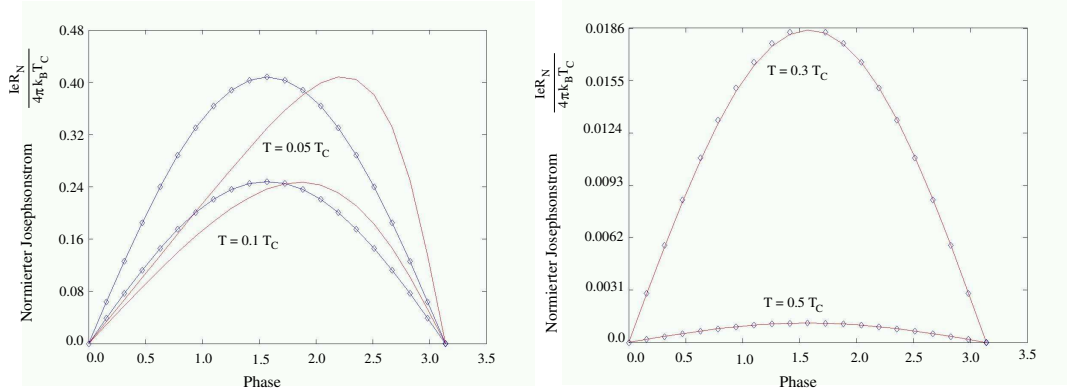


Abbildung 7.2: Abweichung der quasiklassisch bestimmten Strom-Phasen-Beziehung (rot) vom reinen Sinus-Verhalten (blau) in Abhängigkeit der Phase für verschiedene Temperaturen. Als kritische Temperatur wurde entsprechend [20] $T_c = 5.25 \text{ K}$ angenommen.

Halbleiter-Barriere, die zusätzlich zur Phasendifferenz der Supraleiter eine magnetfeldabhängige Verschiebung beinhaltet. Diese effektive Phase ist ortsabhängig, was zur Bildung von Wirbelströmen führt (vgl. Kapitel 8). Das Verhalten in Anwesenheit eines Magnetfelds wurde bislang noch nicht experimentell untersucht. Im Hinblick auf technische Anwendungen ist dieser Effekt interessant, da er unter Umständen die Möglichkeit eröffnet, den Supra-Strom schnell und sehr präzise zu modulieren.

7.2 Josephson-Eindringtiefe im Halbleiter

Um Informationen über die Stromverteilung innerhalb der Barriere in Abhängigkeit des äußeren Magnetfelds und der Temperatur zu erhalten, betrachtet man ein System, welches in z -Richtung eine im Vergleich zur Josephson-Eindringtiefe λ_J geringe Ausdehnung besitzt. Die Josephson-Eindringtiefe ist ein Maß dafür, wie stark das äußere Magnetfeld den Halbleiter-Bereich durchsetzen kann (s. Abb. (7.3) und (7.4)). Zur Herleitung der Josephson-Eindringtiefe für eine sinusförmige Stromverteilung wird üblicherweise die eindimensionale zeitunabhängige Form der Wellengleichung für die Phase angenommen [47]:

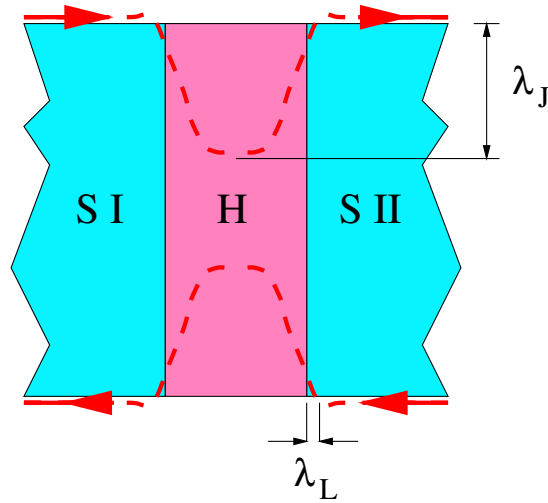


Abbildung 7.3: Schematische Darstellung der Stromlinien im betrachteten Kontakt, wie sie sich bei einem schwachen äußerem Magnetfeld einstellen. Die Abschirmströme der Supraleiter (S I und S II) bewirken, daß im halbleitenden Bereich H das Feld nur bis zu einer Tiefe λ_J , der Josephson-Eindringtiefe, eindringt. Die London-Eindringtiefe λ_L ist im Vergleich mit den anderen Längenskalen im System sehr klein.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\sin \phi}{\lambda_J^2}, \quad (7.4)$$

wobei der Josephson-Strom gewöhnlich folgende Form besitzt:

$$J(B_z^0) = J_c \int_{-\infty}^{\infty} \sin \phi(y) dy. \quad (7.5)$$

Nimmt man die Breite der Barriere zu $2L$ und die London-Eindringtiefe als sehr klein an, folgt für λ_J :

$$\lambda_J^2 = \frac{\hbar}{4eL \cdot J_c}. \quad (7.6)$$

Für den Fall des in dieser Arbeit betrachteten SHS-Kontakts nimmt der Josephson-Strom im Halbleiterbereich folgende, quasiklassisch bestimmte, Form an:

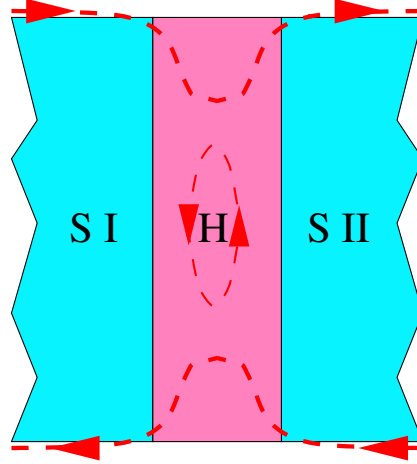


Abbildung 7.4: Schematischer Verlauf der Stromlinien bei einem starken äußeren Magnetfeld. Das Feld dringt in den Halbleitenden Bereich H ein – in Vielfachen des Flußquants $\Phi_0 = \frac{hc}{2e}$.

$$J = \int_{FS+} A_0 \frac{\Delta_\infty^2 \sin[\tilde{\phi}(x, y)]}{C + \Delta_\infty^2 \cos[\tilde{\phi}(x, y)]}, \quad (7.7)$$

wobei A_0 und C Konstanten bezüglich x und y sind. Diese Größen sind aus Kapitel 6 bekannt (Gl.(6.39) und (6.40)):

$$A_0 = 8\pi e \frac{d\theta}{2\pi} |\mathbf{v}_F| \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\epsilon_n > 0} N_{FS} \quad (7.8)$$

und

$$C = 2\epsilon_n^2 \cosh\left(\frac{4\epsilon_n L}{\hbar v_{F_x}}\right) + 2\epsilon_n \sqrt{\epsilon_n^2 + \Delta_\infty^2} \sinh\left(\frac{4\epsilon_n L}{\hbar v_{F_x}}\right) + \Delta_\infty^2 \cosh\left(\frac{4\epsilon_n L}{\hbar v_{F_x}}\right). \quad (7.9)$$

Die Phase $\tilde{\phi}$ ist gegeben durch (vgl. Gl. (6.41)):

$$\tilde{\phi} = \phi_1 - \phi_2 + \left\{ \frac{2e}{\hbar c} \left(\int_0^{-L} \int_{y_0}^{y(X_1)} B_z(x, y) dx dy - \int_0^L \int_{y_0}^{y(X_2)} B_z(x, y) dx dy \right) \right\}. \quad (7.10)$$

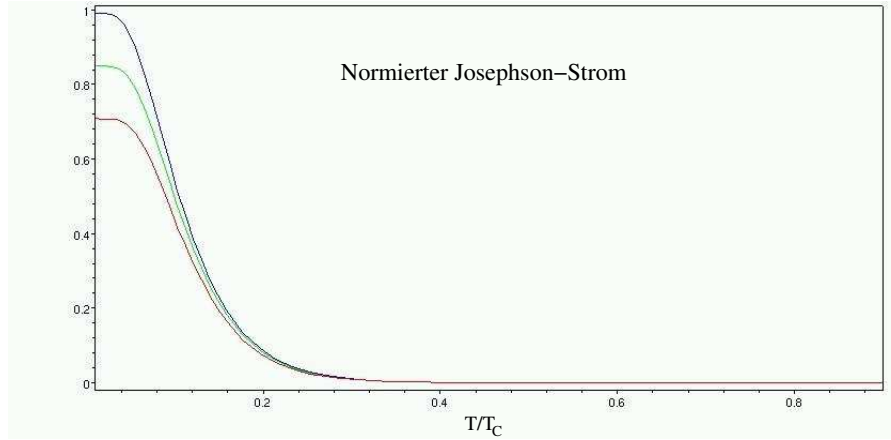


Abbildung 7.5: Josephson-Strom in Abhängigkeit der reduzierten Temperatur T/T_c und des äußeren Magnetfelds. Die Magnetfeldstärke nimmt folgende Werte an (von unten) $B = 0.5 \phi_0/\xi^2$, $B = 0.6 \phi_0/\xi^2$ und $B = 0.7 \phi_0/\xi^2$. Für $T \rightarrow 0$ steigt der Strom gegen einen konstanten Wert. Eine Analyse des kritischen Stroms führt zu vergleichbaren Ergebnissen [3].

wobei $\Phi_0 = \frac{hc}{2e}$ einem Flußquant entspricht, das mit der Ladung $2e$ verknüpft ist. Weiter ist ϕ die Phasendifferenz des betrachteten Kontakts ohne äußeres Magnetfeld. Für dieses System berechnet sich die Josephson-Eindringtiefe folgendermaßen: Ausgehend von der anisotropen London-Gleichung,

$$\lambda_J^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \lambda_L^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = B_z(x, y), \quad (7.11)$$

und der Maxwell-Relation

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (7.12)$$

folgt:

$$\frac{4\pi}{c} \lambda_L^2 \frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{4\pi}{c} \lambda_J^2 \frac{\partial J_x}{\partial y} = -B(x, y). \quad (7.13)$$

Für $\lambda_L^2/\lambda_J^2 \ll 1$ kann mit

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{J} \quad (7.14)$$

leicht folgende Beziehung abgeleitet werden:

$$(-\Delta + \frac{1}{\lambda_J^2}) B_z = \frac{4\pi}{c} \partial_x J_y. \quad (7.15)$$

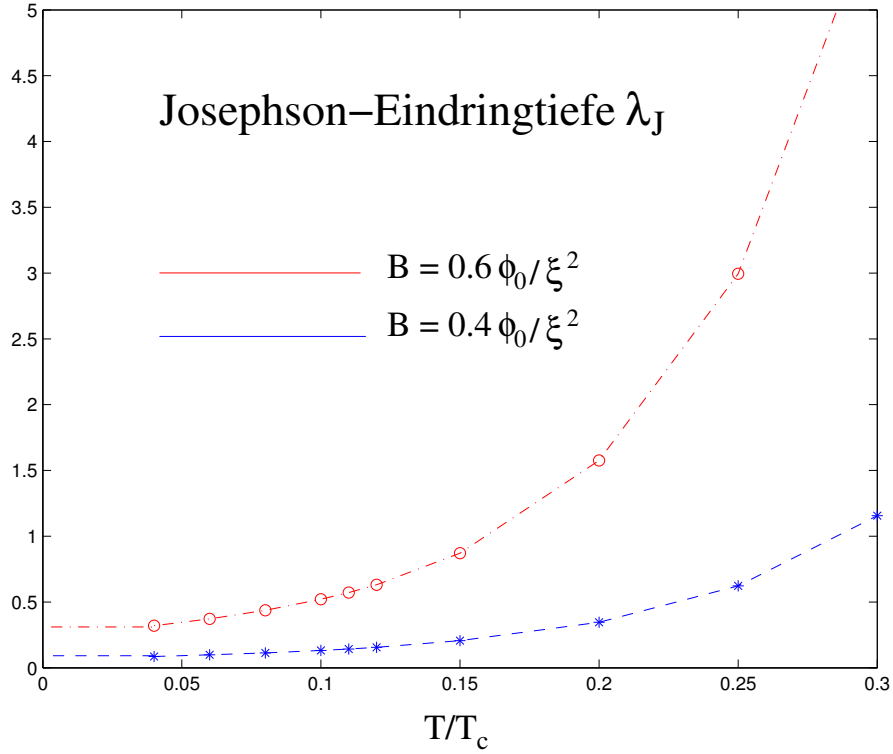


Abbildung 7.6: Aus dem selbstkonsistenten Wirbel-Strom berechnete Josephson-Eindringtiefe in der Halbleiterbarriere als Funktion der reduzierten Temperatur T/T_c für unterschiedliche Stärken des externen Magnetfelds.

Dabei gilt:

$$\frac{4\pi}{c} \partial_y J_x = \frac{1}{\lambda_J^2} B_z. \quad (7.16)$$

Da die y -Abhängigkeit des Josephson-Stroms ausschließlich in der Phase liegt, gilt:

$$\frac{\partial J(B(x, y))}{\partial y} = \frac{8\pi e}{\hbar} \int_{FS+} \frac{d\theta}{2\pi} |\mathbf{v}_F| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \sum_{\epsilon_n > 0} N_{Fs} \cdot k_B T \cdot \Delta_\infty^2 \cdot \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \left(\frac{\cos \tilde{\phi}}{D} - \frac{\Delta_\infty^2 \sin \tilde{\phi}}{D^2} \right), \quad (7.17)$$

wobei sich für die innere Ableitung nach y folgende Relation ergibt:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} = \frac{2e}{\hbar c} \left(\int_0^{-L} B_z(x, y) dx dy \Big|_{y(X_1)} - \int_0^L B_z(x, y) dx dy \Big|_{y(X_2)} \right). \quad (7.18)$$

Daraus folgt sofort die Josephson-Eindringtiefe λ_J :

$$\frac{1}{\lambda_J^2} = -\frac{128\pi^2 e^2}{\hbar c} \frac{1}{B_z(X_0, Y_0)} \int_{F_s^+} \frac{d\theta}{2\pi} |\mathbf{v}_F| \cdot \cos \theta \cdot \sum_{\epsilon n > 0} N_{F_s} \cdot k_B T \cdot \Delta_\infty^2 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \Big|_{(X_0, Y_0)}$$

$$\left(\frac{\cos(\tilde{\phi}_{(X_0, Y_0)}) - \frac{\Delta_\infty^2 \sin^2 \tilde{\phi}_{(X_0, Y_0)}}{C + \Delta_\infty^2 \cos(\tilde{\phi}_{(X_0, Y_0)})}}{C + \Delta_\infty^2 \cos(\tilde{\phi}_{(X_0, Y_0)})} \right). \quad (7.19)$$

Die Josephson-Eindringtiefe ist in Abb. 7.6 dargestellt. Dabei ist ξ die Kohärenzlänge. Die Josephson-Eindringtiefe ist hauptsächlich durch die Abhängigkeit des Supra-Stroms von der Temperatur und dem äußeren Magnetfeld bestimmt 7.5. Sie fällt für $T \rightarrow 0$ gegen einen konstanten Wert, wie auch in vergleichbaren Experimenten gemessen wurde [54]. Für ein ansteigendes externes Magnetfeld nimmt λ_J zu.

Kapitel 8

Auswertung des Josephson-Stroms und des daraus resultierenden Magnetfelds

8.1 Auswertung analytischer Ergebnisse

In diesem Kapitel wird der analytisch berechnete Term für den Josephson-Strom Gl. (8.1) in Anwesenheit eines konstanten äußeren Magnetfelds, und das aus diesem Strom resultierende *innere* Magnetfeld graphisch dargestellt und diskutiert. Dabei wird neben einer quantitativen Veränderung des äußeren Magnetfelds, was zu einer Änderung der effektiven Phase $\tilde{\phi}$ Gl. (8.2) führt, auch der Fall einer Phasendifferenz zwischen den beiden Supraleitern betrachtet. In allen Fällen findet sich eine in y-Richtung periodische Wirbel-/Anti-Wirbelstraße (gegen bzw. mit dem Uhrzeigersinn).

$$\mathbf{J}(\phi, B; x, y; \varepsilon_n) = 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \mathbf{v}_{\mathbf{F}}(\theta) \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} \Delta_{\infty}^2 \cdot \frac{N_{FS} \sin \tilde{\phi}}{A^2 + \Delta_{\infty}^2 \cos \tilde{\phi}} \quad (8.1)$$

Dabei ist die effektive Phase

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{4e}{\hbar c} BL(y - x \tan \theta). \quad (8.2)$$

Alle weiteren Parameter wurden bereits in Kapitel 5 erklärt.

Summiert man das resultierende Magnetfeld über den gesamten Bereich der Barriere auf, so ist bemerkenswert, daß in beiden Fällen, mit und ohne Phasendifferenz, die Magnetfeldstärke gegenüber dem ursprünglich angelegten äußeren Feld ansteigt. Dies bedeutet, die Wirbel in der Stromverteilung sind etwas deutlicher ausgeprägt als die Anti-Wirbel. Es ist zu vermuten, daß bei einer Erweiterung des Modells von zwei auf drei Dimensionen, die Stromstärke der Anti-Wirbel noch weiter abnimmt oder sogar ganz verschwindet.

8.2 Strom- und Feldverteilung ohne Phasendifferenz zwischen den Supraleitern

Für die graphische Auswertung bietet sich eine quadratische Form der Halbleiter-Barriere an. In der Realität ist der Kontakt aber in y -Richtung beliebig fortsetzbar und der in dieser Richtung periodische Quasiteilchen-Strom ebenso. Es sind also verschiedenste experimentelle Anordnungen beispielsweise auch zylinderförmige Kontakte, bzw. Sandwich-Strukturen denkbar.

Zwischen den beiden Supraleitern wird die Phasendifferenz in diesem Fall als verschwindend gering angenommen. Außerdem liegt keine äußere Spannung am Kontakt an, d. h. man betrachtet den statischen Fall der Wirbelstromverteilung in der Barriere. Aus der Relation der effektiven Phase Gl.(8.2) ergibt sich die Symmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs (s. Abb. 8.1), welcher in die Mitte des Kontakts gelegt wurde. Diese Symmetrie bleibt für ein homogenes Magnetfeld erhalten, auch wenn sich dessen Betrag ändert. Jedoch die Periodizität der Wirbel, wie auch die Stromstärke, werden vom Betrag des Magnetfeldes modifiziert (s. Abb. 8.3). Das bedeutet die Wirbelstraße wird in Abhängigkeit von dem in die Halbleiter-Barriere eindringenden Fluß gestreckt bzw. gestaucht. Die Stromstärke ändert sich entsprechend und somit auch das daraus resultierende Magnetfeld in z -Richtung (s. Abb.(8.2) und (8.4)).

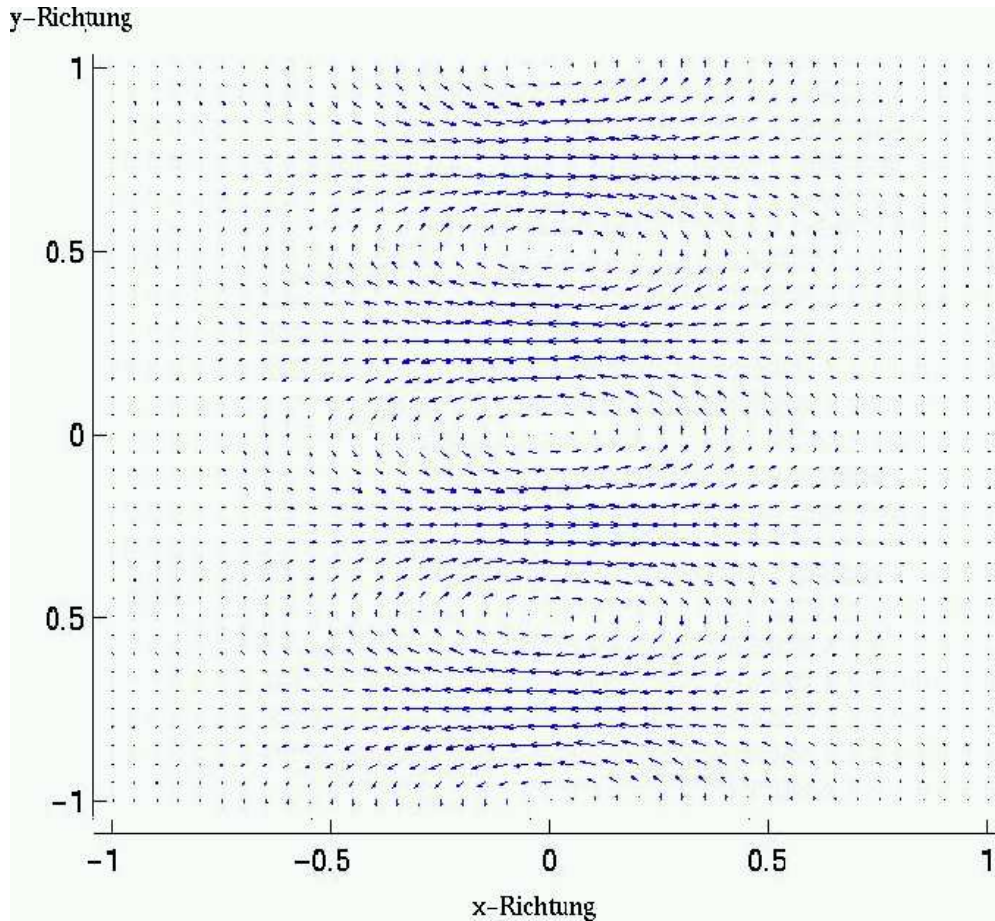


Abbildung 8.1: Diese Abbildung zeigt die Stromverteilung im Bereich der halbleitenden Barriere. In dieser Betrachtung wird die Barriere als quadratisch mit einer Kantenlänge von $2L$ angenommen wobei die Länge L in Vielfachen der Kohärenzlänge ξ gemessen wird. Das äußere Magnetfeld B wird in Vielfachen von Φ_0/ξ^2 angegeben und beträgt hier $0.5 \cdot \Phi_0/\xi^2$. Die Phasendifferenz zwischen den beiden Supraleitern ist verschwindend gering.

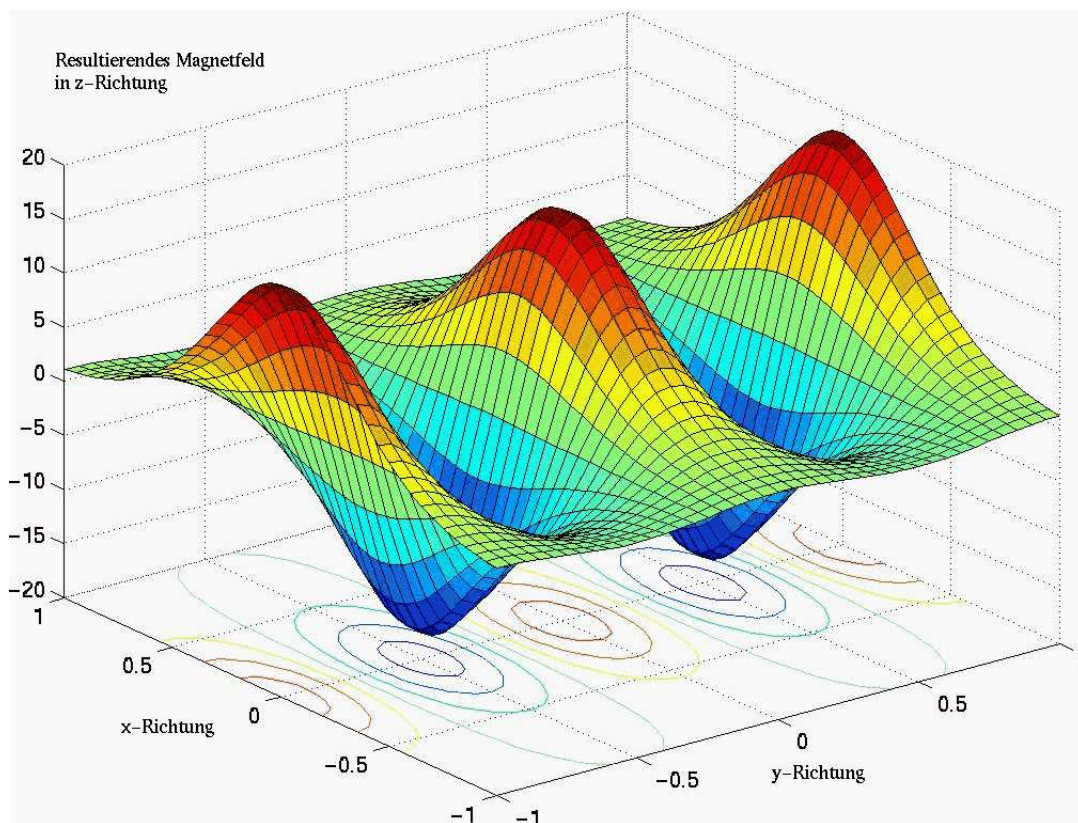


Abbildung 8.2: Resultierendes Magnetfeld B gemessen in Vielfachen von Φ_0/ξ^2 . Das äußere Magnetfeld hat die Stärke $0.5 \cdot \Phi_0/\xi^2$, d. h. in die Barriere dringt ein Fluß von $2\Phi_0$ ein. Auf dem Contour-Plot, der dem Graphen des Magnetfelds unterlegt ist, sind die Strom-Wirbel rot und die Anti-Wirbel blau zu erkennen.

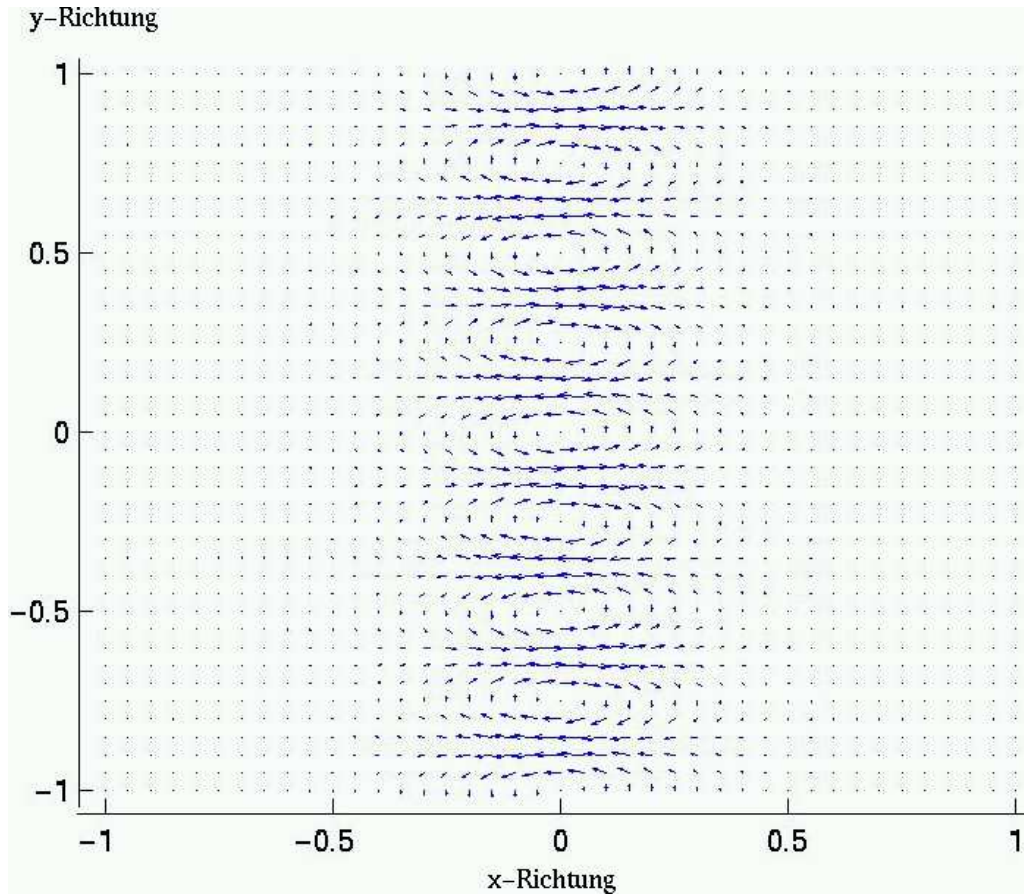


Abbildung 8.3: Quasiteilchen-Strom für ein äußeres Magnetfeld der Stärke Φ_0/ξ^2 . Wie man erkennen kann, beeinflusst eine Erhöhung der Stärke des äußeren Magnetfelds lediglich die Anzahl der vorhandenen Wirbel und Anti-Wirbel und den Abstand der Wirbelzentren, sprich die Periodenlänge der Stromverteilung. Die Fixierung eines Wirbels am Nullpunkt, d. h. in der Mitte der Barriere, bleibt unabhängig von der Stärke des äußeren Magnetfelds erhalten.

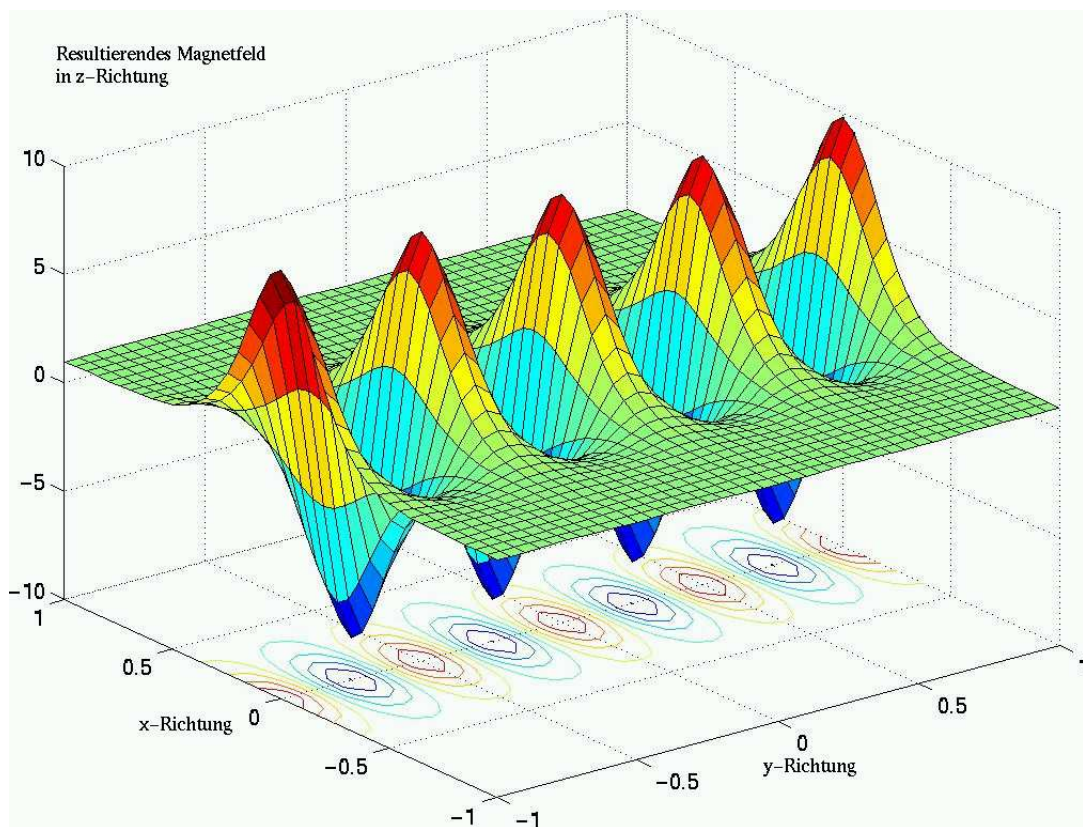


Abbildung 8.4: Aus dem Quasiteilchen-Strom resultierendes Magnetfeld für ein vorgegebenes äußeres Feld der Stärke Φ_0/ξ^2 .

8.3 Strom- und Feldverteilung bei endlicher Phasendifferenz

Nimmt man eine nicht verschwindende Phasendifferenz zwischen dem linken und dem rechten Supraleiter an, so ergibt sich im Wirbel-Strommuster (Abb. 8.5) eine Verschiebung in y -Richtung (Gl.8.1). Das resultierende Magnetfeld (Abb. 8.6) verschiebt sich im hier verwendeten Modell mit dem Strom in y -Richtung. Das bedeutet: Gelingt es, die Phase der Cooperpaare in den beiden Supraleitern dynamisch zu variieren, so erreicht man eine kontinuierliche Bewegung des Wirbelmusters und der resultierenden Magnetfeldverteilung in y -Richtung. Um solche Nichtgleichgewichtseffekte behandeln zu können, muß also das Modell dahingehend erweitert werden, daß eine Zeitabhängigkeit berücksichtigt wird, um beispielsweise auch Hysterese-Effekte im Kontakt zu berücksichtigen.

Treffen die Wirbel im Fall einer in y -Richtung langen aber beschränkten Barriere auf die Grenzfläche zum Vakuum auf, so strahlen sie Energie proportional zu ihrer Stromstärke ab, d. h. man erhält einen Sender. Ein Teil der Energie wird sicherlich an der Grenzfläche des Kontakts reflektiert, dies kann jedoch unter Umständen durch eine geeignete Bauweise des Josephson-Elements minimiert werden [3, 48]. An dieser Stelle eröffnet sich eine interessante Anwendungsmöglichkeit für den SHS-Kontakt, leider wurden jedoch bisher wenige Experimente auf diesem Gebiet durchgeführt.

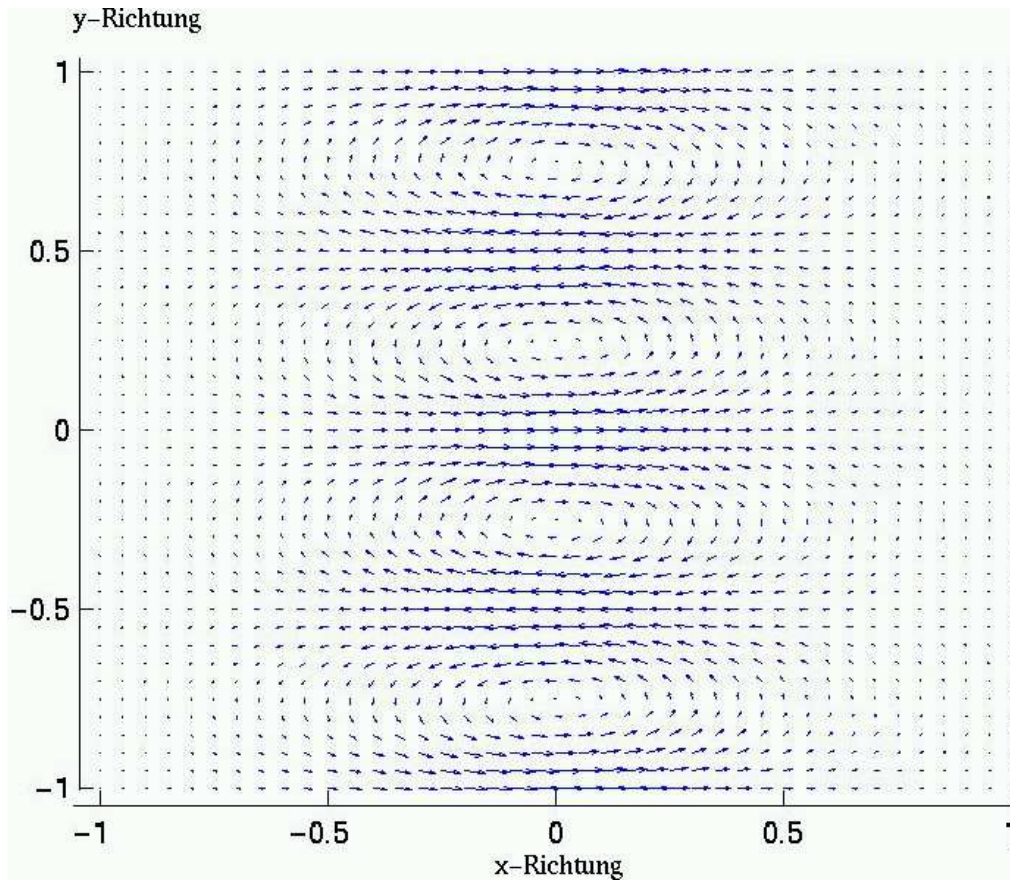


Abbildung 8.5: Wirbelströme innerhalb der Barriere bei einer Phasendifferenz der beiden Supraleiter von $\pi/2$. Das Wirbel-Strommuster verschiebt sich um eine halbe Periodenlänge in y-Richtung. Durch Variation der Phasendifferenz mittels eines äußeren Stroms könnte man eine Bewegung der Wirbel in y-Richtung erzeugen. Das Ausgangsmagnetfeld beträgt $0.5 \cdot \Phi_0/\xi^2$.

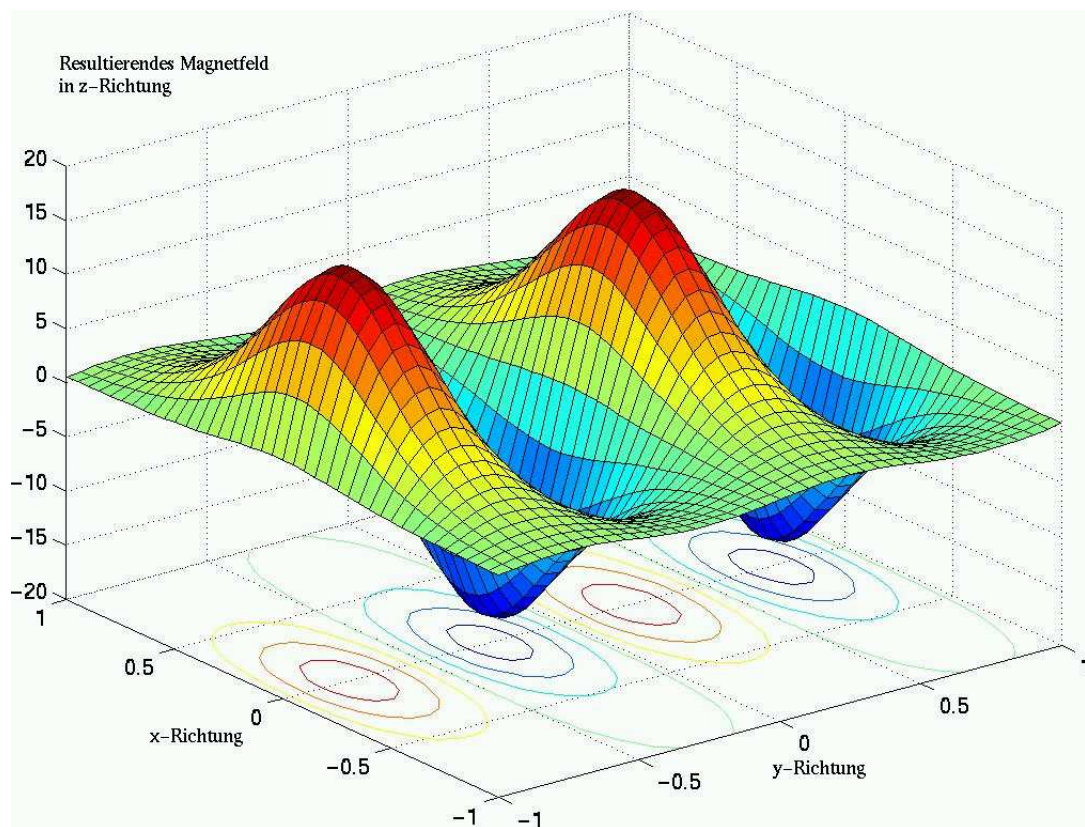


Abbildung 8.6: Verschiebung des resultierenden Magnetfelds für eine Phasendifferenz der Supraleiter von $\pi/2$ um eine halbe Periodenlänge in y-Richtung.

8.4 Numerische Auswertung der Selbstkonsistenzrechnungen

Der Josephson-Strom und das Magnetfeld im Bereich der Barriere beeinflussen sich gegenseitig, d. h. man stößt an dieser Stelle auf ein Selbstkonsistenzproblem, das in dieser Arbeit unter Benutzung der Methoden in Kapitel 5 numerisch gelöst wird. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse dieser Selbstkonsistenz-Rechnungen diskutiert.

Bei hohen Temperaturen ergibt sich eine äußerst schnelle Konvergenz, für Temperaturen nahe dem absoluten Nullpunkt werden deutlich mehr Iterationsstufen benötigt. Schließlich läßt sich jedoch für alle Temperaturbereiche eine selbstkonsistente Form des Josephson-Stroms finden, sofern beachtet wird, daß bei tiefen Temperaturen alle Matsubara-Frequenzen zum Strom beitragen [49]. Der Effekt der Verschiebung der Wirbelströme in y -Richtung für eine endliche Phasendifferenz der Supraleiter, wie in der analytischen Rechnung gezeigt wurde (s. Kapitel 8.3), bleibt erhalten (s. Abb. 8.15). Die nun folgenden Abbildungen zeigen die Abhängigkeit des Stroms und des Magnetfelds von der Temperatur und der Ausdehnung des Kontakts. Dabei zeigt sich, daß Wirbelströme zwar auf dem gesamten Temperaturbereich zwischen T_c und 0 qualitativ vorhanden sind, jedoch für tiefe Temperaturen die Stromstärke der Komponenten und des Gesamtstroms wesentlich höher ist. Dies wurde experimentell (s. Kapitel 8.1) bestätigt. Weiter zeigt sich, daß die Richtung der Stromkomponenten zwar erhalten bleibt, sich aber die Verteilung der Stromstärke dahingehend verändert, daß bei tiefen Temperaturen, relativ hohen Magnetfeldern und extrem langen Kontakten nur noch periodisch wechselnde parallele und antiparallele Komponenten in der Mitte der Barriere eine Rolle spielen. Dies wird in den nachfolgenden Abbildungen dargestellt. Demzufolge ändert sich auch die Topographie des Magnetfelds qualitativ. Quantitative Veränderungen des Magnetfelds bzgl. des äußeren Magnetfelds liegen im Promillebereich, für relativ kleine Magnetfelder und niedrige Temperaturen auch im Prozentbereich. Der hier beschriebene Effekt ist also sehr klein. Das Wirbelmuster und das resultierende Magnetfeld werden jeweils über eine Periodenlänge graphisch dargestellt.

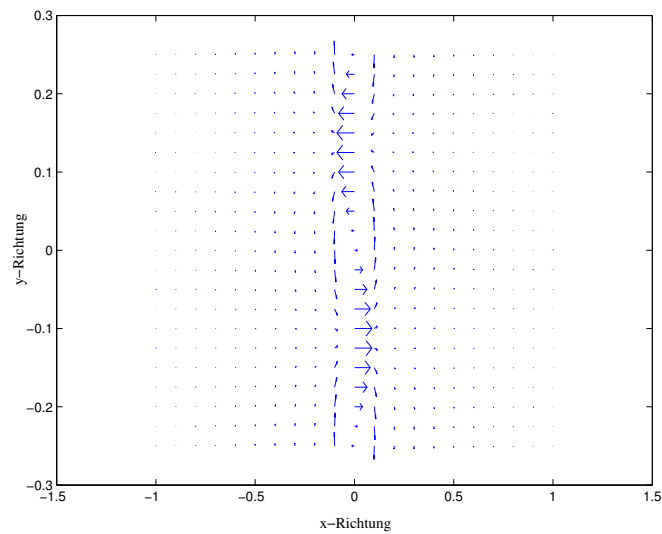


Abbildung 8.7: Selbstkonsistenter Josephson-Strom für einen langen, aber endlichen Kontakt. Das äußere Magnetfeld B_0 hat die Stärke $\Phi_0/(\xi^2)$. Die Phasendifferenz der Supraleiter ϕ ist 0, die Temperatur beträgt $0.8 \cdot T_c$. Dargestellt wird die Verteilung über eine Periodenlänge in y -Richtung.

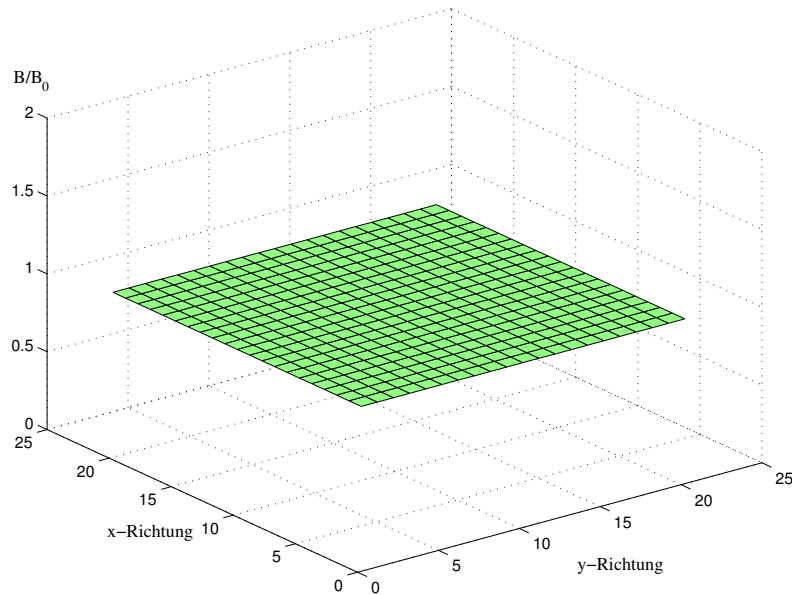


Abbildung 8.8: Resultierendes Magnetfeld in Vielfachen von $\Phi_0/(\xi^2)$ für eine lange, aber endliche Junction zur Stromverteilung in Abb. 8.7. Dieser Effekt ist minimal.

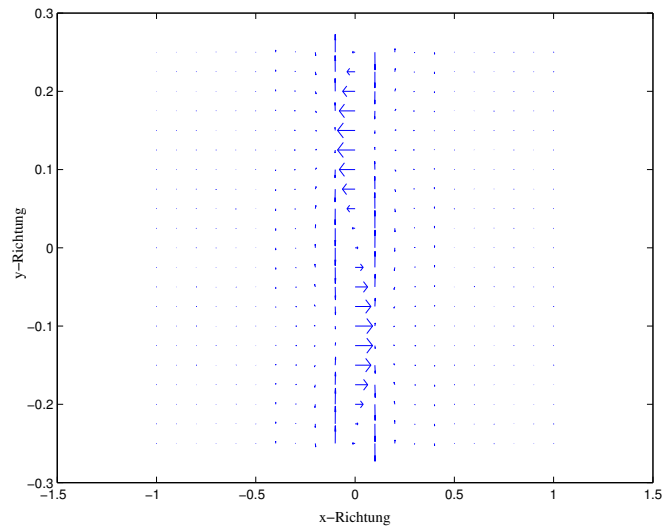


Abbildung 8.9: Selbstkonsistenter Josephson-Strom für eine lange, aber endliche Junction. Das äußere Magnetfeld B_0 hat die Stärke $\Phi_0/(\xi^2)$. Die Phasendifferenz der Supraleiter ϕ ist 0, die Temperatur beträgt $0.4 \cdot T_c$.

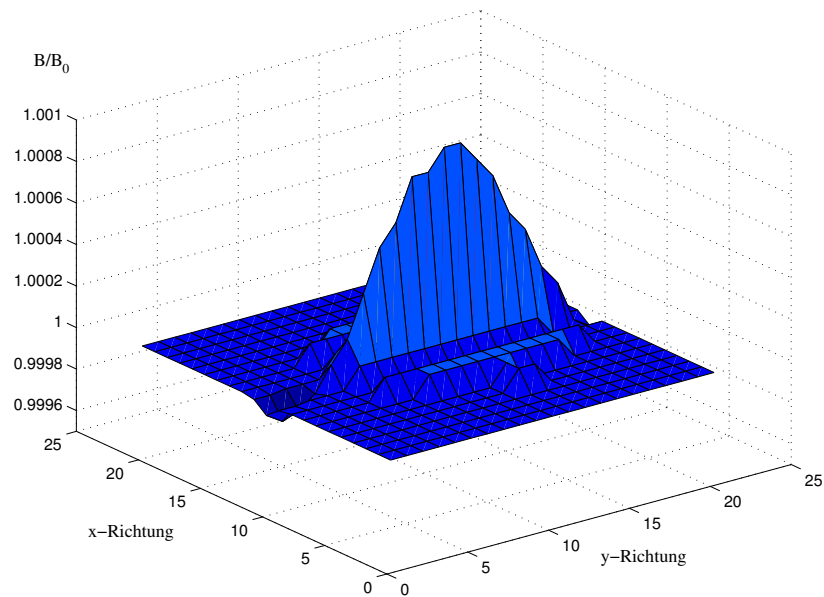


Abbildung 8.10: Resultierendes Magnetfeld in Vielfachen von $\Phi_0/(\xi^2)$ für einen langen, aber endlichen Kontakt zur Stromverteilung Abb. 8.9. In x-Richtung werden erste Strukturen als Auswirkungen der endlichen Länge des Kontakts sichtbar.

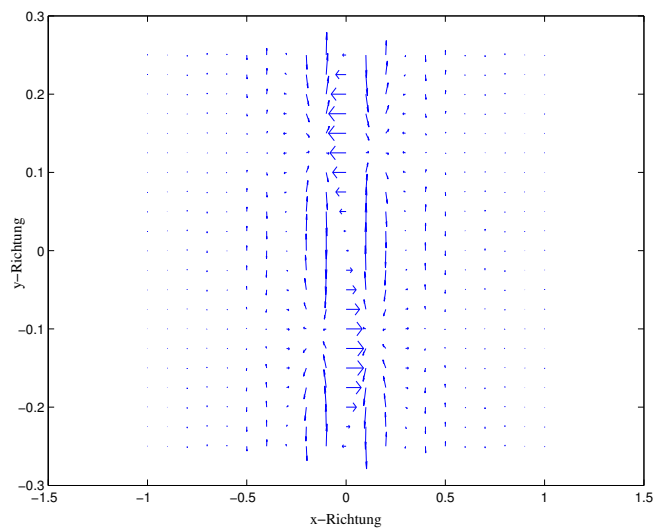


Abbildung 8.11: Selbstkonsistenter Josephson-Strom für einen langen, aber endlichen Kontakt. Das äußere Magnetfeld B_0 hat die Stärke $\Phi_0/(\xi^2)$. Die Phasendifferenz der Supraleiter ϕ ist 0, die Temperatur beträgt $0.1 \cdot T_c$.

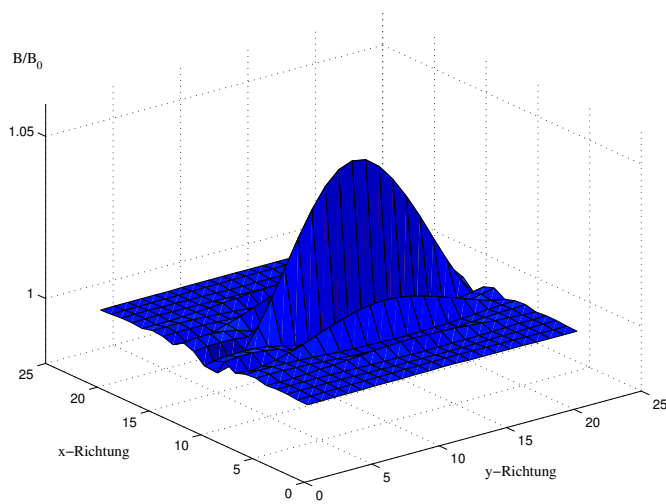


Abbildung 8.12: Resultierendes Magnetfeld in Vielfachen von $\Phi_0/(\xi^2)$ für eine lange, aber endliche Junction zur Stromverteilung Abb. 8.11.

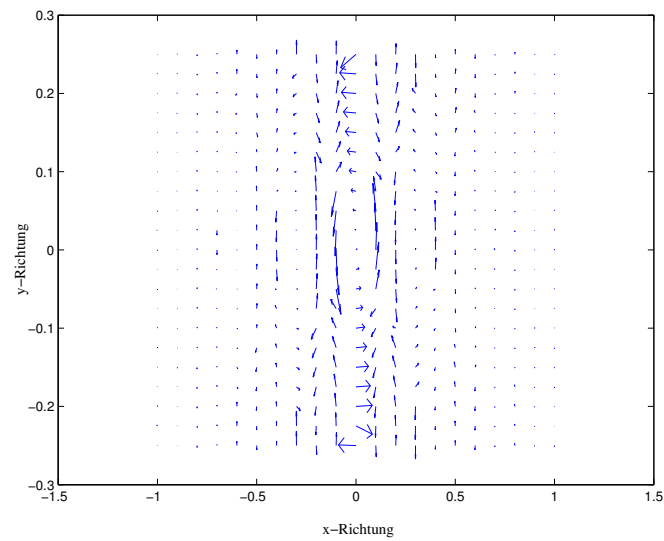


Abbildung 8.13: Selbstkonsistenter Josephson-Strom für einen langen, aber endlichen Kontakt. Das äußere Magnetfeld B_0 hat die Stärke $\Phi_0/(\xi^2)$. Die Phasendifferenz der Supraleiter ϕ ist 0, die Temperatur beträgt $10^{-4} \cdot T_c$.

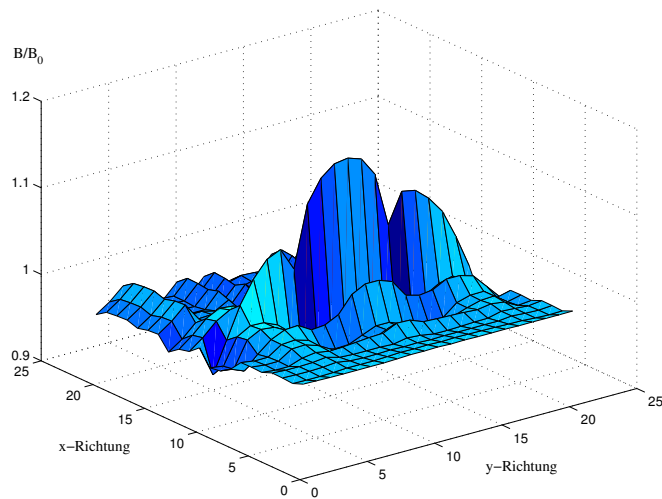


Abbildung 8.14: Resultierendes Magnetfeld in Vielfachen von $\Phi_0/(\xi^2)$ für einen langen, aber endlichen Kontakt zur Stromverteilung Abb. 8.13.

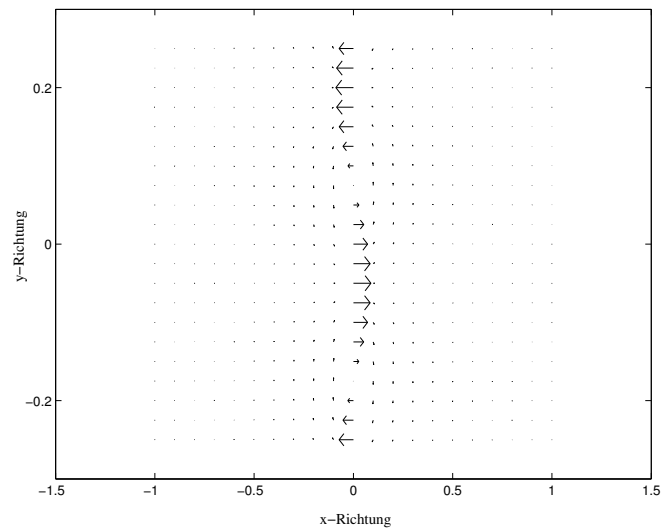


Abbildung 8.15: Selbstkonsistenter Josephson-Strom für eine lange, aber endliche Junction. Das äußere Magnetfeld B_0 hat die Stärke $\Phi_0/(\xi^2)$. Die Phasendifferenz der Supraleiter ϕ beträgt $\pi/4$, die Temperatur $0.5 \cdot T_c$. Deutlich zu sehen ist die Verschiebung der Wirbelzentren in y -Richtung.

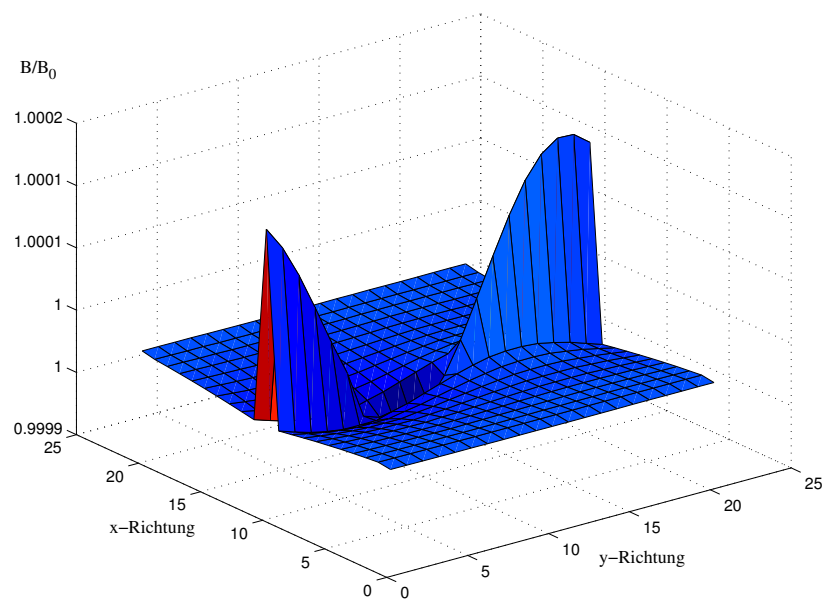


Abbildung 8.16: Resultierendes Magnetfeld in Vielfachen von $\Phi_0/(\xi^2)$ für einen langen, aber endlichen Kontakt zur Stromverteilung in Abb. 8.15. Die Topographie verschiebt sich mit den Stromwirbeln in y -Richtung.

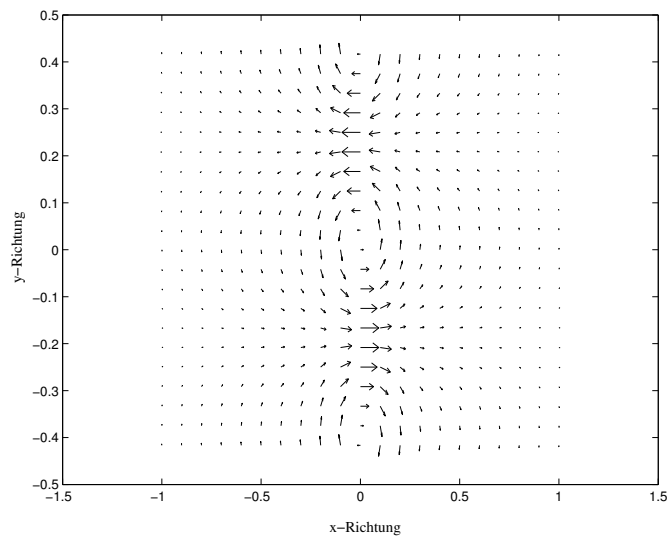


Abbildung 8.17: Selbstkonsistenter Josephson-Strom für eine endliche, lange Junction. Das äußere Magnetfeld B_0 hat die Stärke $0.6 \cdot \Phi_0/(\xi^2)$. Die Phasendifferenz der Supraleiter ϕ ist 0, die Temperatur beträgt $0.5 \cdot T_c$. Die Ausprägung der Wirbel in x-Richtung nimmt mit sinkendem äußerem Magnetfeld zu.

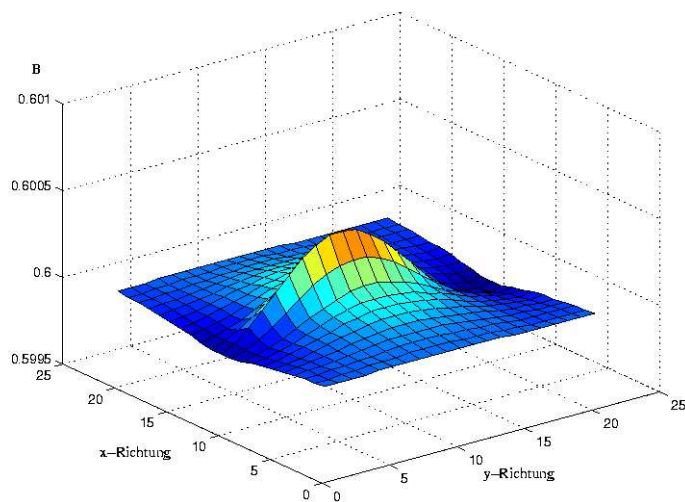


Abbildung 8.18: Resultierendes Magnetfeld in Vielfachen von $\Phi_0/(\xi^2)$ für einen langen, aber endlichen Kontakt zur Stromverteilung Abb. 8.17.

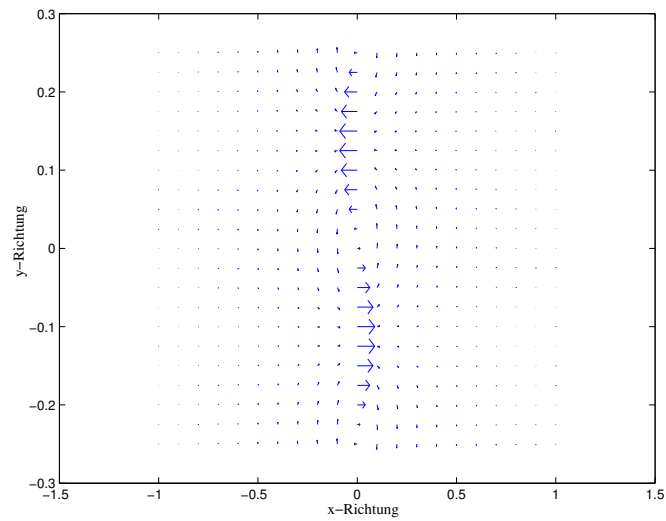


Abbildung 8.19: Selbstkonsistenter Josephson-Strom für einen unendlich langen Kontakt. Das äußere Magnetfeld B_0 hat die Stärke $\Phi_0/(\xi^2)$. Die Phasendifferenz der Supraleiter ϕ ist 0, die Temperatur beträgt $0.8 \cdot T_c$.

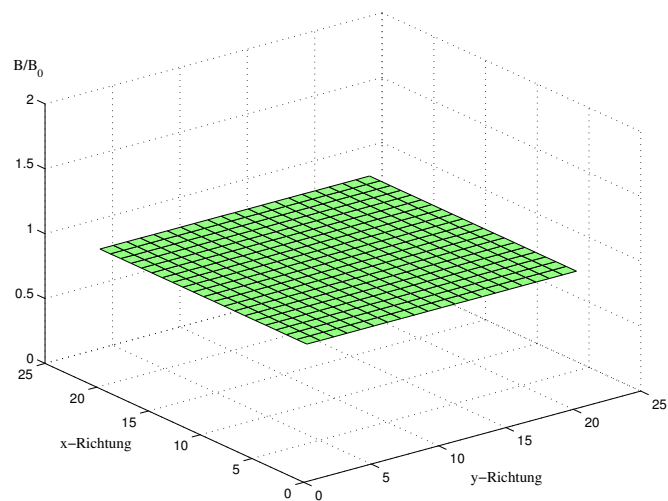


Abbildung 8.20: Resultierendes Magnetfeld in Vielfachen von $\Phi_0/(\xi^2)$ für einen in y-Richtung unendlich langen Kontakt zur Stromverteilung Abb. 8.19.

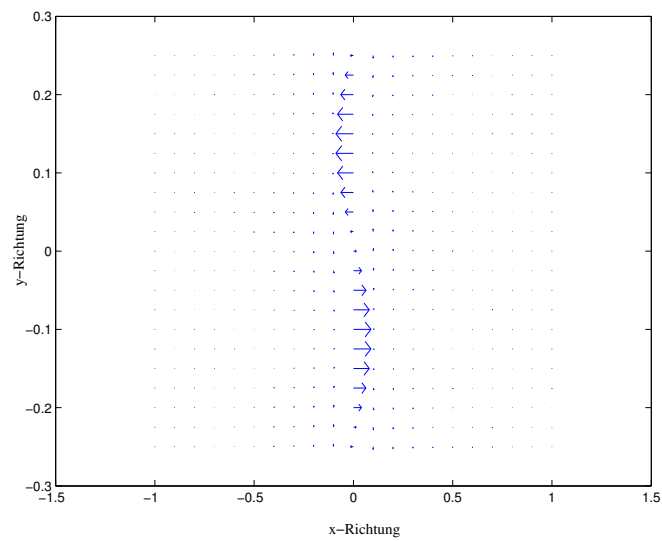


Abbildung 8.21: Selbstkonsistenter Josephson-Strom für einen unendlich langen Kontakt. Das äußere Magnetfeld B_0 hat die Stärke $\Phi_0/(\xi^2)$. Die Phasendifferenz der Supraleiter ϕ ist 0, die Temperatur beträgt $0.4 \cdot T_c$.

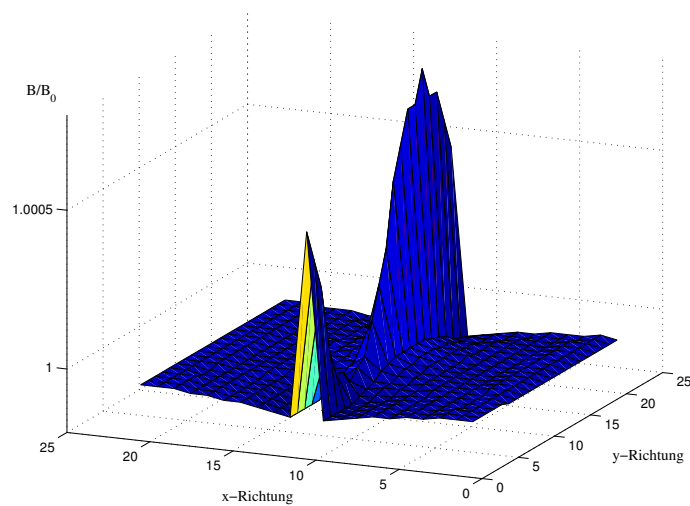


Abbildung 8.22: Resultierendes Magnetfeld in Vielfachen von $\Phi_0/(\xi^2)$ für einen in y-Richtung unendlich langen Kontakt zur Stromverteilung Abb. 8.21.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Diplomarbeit diskutiere ich die Josephson-Stromverteilung im ballistischen, langen SHS-Kontakt. Dies beinhaltet insbesondere die Betrachtungen des Kontakts im äußeren Magnetfeld. Der durch das äußere Feld verursachte Suprastrom führt zu einem Selbstkonsistenz-Problem für das effektive Magnetfeld. Die numerische Lösung liefert folgende Ergebnisse:

- Das externe Magnetfeld verursacht in der Halbleiter-Barriere Quasiteilchen-Wirbelströme. Die Strom-Phasenbeziehung zeigt für kleine Temperaturen eine signifikante Abweichung vom Sinus-Verhalten, die durch experimentelle Untersuchungen [20, 21] bestätigt wird. Es existiert eine effektive Phase, welche neben der üblichen Abhängigkeit von der Phasendifferenz der Supraleiter auch einen vom Magnetfeld und einen vom Ort abhängigen Term beinhaltet.
- Bei Erhöhung des äußeren Magnetfelds zeigt sich ein Wirbelmuster mit verkürzter Periodenlänge und schwächer ausgeprägten Stromwirbeln. Daraus ergibt sich, daß jeder Stromwirbel bzw. Antiwirbel einen relativ geringeren Beitrag zum effektiven Magnetfeld liefert.
- Mit sinkender Temperatur steigt die Stromstärke des Supra-Stroms. Die Periodizität bleibt erhalten, jedoch verändert sich die Charakteristik der Wirbel dahingehend, daß die Komponenten in der Mitte der Barriere

(d. h. in x-Richtung) verstärkt werden, was zu einer qualitativen Veränderung des effektiven Magnetfelds führt.

- Die Josephson-Eindringtiefe λ_J charakterisiert die Bindung der Abschirmströme an den Barrierenrand. Die graphische Auswertung ergibt ein Abfallen mit der Temperatur gegen einen konstanten Wert für $T \rightarrow 0$. Für steigendes äußeres Magnetfeld nimmt λ_J zu.

Bisher wurde ein zweidimensionales Modell mit einer statischen Strom- und Magnetfeldverteilung betrachtet. Für weiterführende Untersuchungen ist es interessant, das Modell bzgl. folgender Aspekte zu ergänzen: Als erstes bietet sich an, die Dynamik (Zeitabhängigkeit) des Magnetfelds und der Phasendifferenz zu berücksichtigen. Damit wäre ein dynamisches Verhalten der Stromwirbel, z. B. in einem Hochfrequenzfeld, beschrieben. Eventuell auftretende hystereseartige Auswirkungen könnten diskutiert werden. Desweiteren ist es für technische Anwendungen von Interesse, eine Energiebilanz für das gesamte dynamische System aufzustellen. Die Berücksichtigung der dritten räumlichen Dimension ist ebenfalls von Bedeutung, da sich dabei Effekte, zeigen wie z. B. die Wechselwirkung zwischen Wirbel- und Antiwirbel oder auch sogenannte *finite-size* Effekte zeigen könnten. Ferner wäre es interessant das Modell im Hinblick auf unkonventionelle Supraleiter zu erweitern.

Bisher wurde die erhebliche Abweichung des Josephson-Stroms vom Verhalten in einem konventionellen Tunnel-Kontakt experimentell bestimmt. An dieser Stelle wäre es notwendig, die magnetfeldabhängige Strom-Phasenbeziehung zu messen, und das Wirbelverhalten im Bereich der Halbleiterbarriere zu bestätigen.

Aus der Relation für den Josephson-Strom ergibt sich die Möglichkeit, den Supra-Strom mittels eines äußeren Magnetfelds sehr präzise zu variieren. Dieser Aspekt ist für technische Anwendungen (Transistoren) von großem Interesse sein. Gelingt es, die Dynamik der Stromwirbel in der Barriere zu kontrollieren, so wäre dies evtl. für den Bau eines Mini-Senders von Bedeutung.

Anhang A

Fourier-Transformation des Josephson-Stroms

In einem langen SHS-Kontakt wurde der Josephson-Strom für ein konstantes Magnetfeld \mathbf{B} unter der Annahme von Andreev-Reflektion analytisch berechnet. Zur Bestimmung des aus dem Josephson-Strom resultierenden Magnetfelds, wird der Strom durch eine Fourier-Transformation in y -Richtung auf eine Form gebracht, die sich später für die Anwendungen der Maxwell-Gleichungen als besonders geeignet erweisen wird. Die y -Richtung wurde deshalb gewählt, weil das hier behandelte Problem in diese Richtung eine Translationsinvarianz aufweist, und periodischen Randbedingungen genügt.

Ausgangspunkt ist also der Strom für ein konstantes Magnetfeld \mathbf{B} in z -Richtung. Dieser Josephson-Strom wurde bereits berechnet und ist durch folgende Beziehung gegeben:

$$\mathbf{J}(\phi, B; x, y; \varepsilon_n) = 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \mathbf{v}_{\mathbf{F}}(\theta) \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} \Delta_{\infty}^2 \cdot \frac{N_{FS} \sin \tilde{\phi}}{A^2 + \Delta_{\infty}^2 \cos \tilde{\phi}} \quad , \quad (\text{A.1})$$

wobei der für nachfolgende Betrachtungen relevante Anteil folgendermaßen

aussieht:

$$j(x, y, B, \phi; \varepsilon_n) = \Delta_\infty^2 \frac{\sin \tilde{\phi}}{A^2 + \Delta_\infty^2 \cos \tilde{\phi}}. \quad (\text{A.2})$$

Also:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\phi, B; x, y; \varepsilon_n) &= 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \mathbf{v}_F(\theta) N_{FS} \frac{k_B T}{\hbar} \\ &\cdot \sum_{\varepsilon_n} j(x, y; B, \phi; \varepsilon_n) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

mit folgendem Ausdruck für die Fermigeschwindigkeit:

$$\mathbf{v}_F(\theta) = \begin{pmatrix} v_{Fx} \\ v_{Fy} \end{pmatrix} = v_F \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Der Übersichtlichkeit wegen wird gesetzt:

$$\begin{aligned} A^2 &= 2\varepsilon_n^2 \cosh\left(\frac{4\varepsilon_n L}{\hbar v_{Fx}}\right) + 2\varepsilon_n \sqrt{\varepsilon_n^2 + \Delta_\infty^2} \sinh\left(\frac{4\varepsilon_n L}{\hbar v_{Fx}}\right) \\ &+ \Delta_\infty^2 \left(\cosh\left(\frac{4\varepsilon_n L}{\hbar v_{Fx}}\right)\right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\phi, B; \theta; x, y) = \phi - \frac{4e}{\hbar c} BL(y - x \tan(\theta)). \quad (\text{A.6})$$

Für die Selbstkonsistenzrechnungen ist es notwendig, aus diesem Strom wieder ein Magnetfeld auszurechnen, um dieses dann rekursiv einzusetzen. Der hier berechnete Josephson-Strom weist eine Periodizität (Wirbelstraße) in y-Richtung auf. Durch eine Fourier-Transformation des ortsabhängigen Teils j des Josephson-Stroms in y-Richtung reduziert sich die Ortsabhängigkeit auf den Parameter x .

A.1 Die Transformation

Die Periodizitätsbedingung lautet:

$$\mathbf{J}(x, y + Y_P, B, \phi; \varepsilon_n) = \mathbf{J}(x, y, B, \phi; \varepsilon_n) \quad (\text{A.7})$$

$$\Rightarrow Y_P = \frac{\hbar c \pi}{2eBL} = \frac{\Phi_0}{2BL} \quad (\text{A.8})$$

$$\Phi_0 = \frac{\hbar c}{2e} = \frac{2\pi \hbar c}{2e} = \frac{\hbar c \pi}{e} \equiv \text{Flu\ss} \text{quant} \quad (\text{A.9})$$

Die Bedeutung der Gr\o{\ss}e Y_P liegt in der anschaulichen Interpretation, sie charakterisiert den Abstand zwischen je zwei Wirbelzentren. Jeder Wirbel bzw. Antiwirbel tr\aa{g}t dabei genau einen Flu\ss von $\frac{\Phi_0}{2}$.

An dieser Stelle f\uhrt man nun eine neue Variable in Abh\angigkeit des Flusses ein:

$$Q_y = \frac{2\pi}{Y_P} n_y = \frac{4e}{\hbar c} BL n_y \quad \text{mit } n_y \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.10})$$

so l\aa{\ss}t sich j als Fourier-Reihe schreiben:

$$j(x, y, B, \phi; \varepsilon_n) = \sum_{Q_y} e^{iQ_y y} c_{Q_y}(x; B, \phi; \varepsilon_n). \quad (\text{A.11})$$

Bestimme y aus der Definition von $\tilde{\phi}$:

$$y = \frac{\hbar c}{4eBL} [\phi - \tilde{\phi} + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) x BL], \quad (\text{A.12})$$

und

$$dy = -d\tilde{\phi} \cdot \frac{\hbar c}{4eBL}, \quad (\text{A.13})$$

$$d\tilde{\phi} = -dy \cdot \frac{4e}{\hbar c} BL. \quad (\text{A.14})$$

Daraus folgt schlie\sslich:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{Y_P} &= -\frac{d\tilde{\phi}}{Y_P \frac{4e}{\hbar c} BL} \\ &= -\frac{d\tilde{\phi}}{\Phi_0 \frac{2e}{\hbar c}} \\ &= -\frac{d\tilde{\phi}}{2\pi}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Der Fourier-Koeffizient c_{Q_y} berechnet sich wie folgt:

$$c_{Q_y} = \frac{1}{Y_P} \int_0^{Y_P} dy \cdot e^{-iQ_y \cdot y} j(\phi, B; x, y) \quad (\text{A.16})$$

$$= \frac{1}{Y_P} \int_0^{Y_P} dy \cdot e^{-iQ_y \frac{\hbar c}{4eBL} [\phi - \tilde{\phi} + \frac{4e}{\hbar c} xBL \tan(\theta)]} \cdot j(\phi, B; x, y), \quad (\text{A.17})$$

setzt man nun Q_y aus Gl. (A.10) ein, so folgt daraus:

$$= \frac{1}{Y_P} \int_0^{Y_P} dy \cdot e^{-in_y [\phi - \tilde{\phi} + \frac{4e}{\hbar c} xBL \tan(\theta)]} \cdot j(x, y; B, \phi; \varepsilon_n) \\ = e^{-in_y (\phi + \frac{4e}{\hbar c} xBL \tan(\theta))} \cdot \frac{1}{Y_P} \int_0^{Y_P} dy \cdot e^{in_y \tilde{\phi}} \cdot j(x, y; B, \phi; \varepsilon_n). \quad (\text{A.18})$$

Aus Gl. (A.15) folgt:

$$Y_P = -2\pi \frac{dy}{d\tilde{\phi}}, \quad (\text{A.19})$$

und weiterhin folgt aus Gl. (A.13):

$$\frac{dy}{d\tilde{\phi}} = -\frac{4e}{\hbar c} BL. \quad (\text{A.20})$$

Mit der Gl. (A.10) ergibt sich schließlich:

$$\frac{dy}{d\tilde{\phi}} = -\frac{Q_y}{n_y} = -\frac{2\pi}{Y_P}. \quad (\text{A.21})$$

Dies wiederum eingesetzt in Gl. (A.19), ergibt:

$$Y_P = 2\pi, \quad (\text{A.22})$$

was letztlich der Periodizität in y -Richtung entspricht.

Nach diesen kurzen Betrachtungen läßt sich nun für den Fourier-Koeffizienten c_{Q_y} weiterschreiben:

$$c_{Q_y} = e^{-in_y (\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) xBL)} (-1) \int_0^{2\pi} \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} \cdot e^{in_y \tilde{\phi}} \cdot j(x, y(\tilde{\phi}); B, \phi; \varepsilon_n). \quad (\text{A.23})$$

A.2 Berechnung der Fourier-Reihe mit dem Residuensatz

Um den Residuensatz zur Berechnung der Fourier-Reihe anwenden zu können, benötigt man eine geeignete Parametrisierung des Integrationswegs in der komplexen Ebene um das Residuum herum. Deshalb führe ich an dieser Stelle folgenden Substitution durch:

$$z = e^{i\tilde{\phi}} \quad (\text{A.24})$$

Daraus folgt:

$$dz = ie^{i\tilde{\phi}} d\tilde{\phi} \quad (\text{A.25})$$

$$= iz \cdot d\tilde{\phi}, \quad (\text{A.26})$$

wobei

$$d\tilde{\phi} = \frac{1}{i} \frac{dz}{z}, \quad (\text{A.27})$$

und weiterhin

$$e^{i\tilde{\phi}n_y} = z^{n_y}. \quad (\text{A.28})$$

Damit folgt nun für das Integral im Fourier-Koeffizienten Gl. (A.23):

$$(-1) \int_0^{2\pi} \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} e^{in_y\tilde{\phi}} \cdot \frac{\Delta_\infty^2 \sin \tilde{\phi}}{A^2 + \Delta_\infty^2 \cos \tilde{\phi}}, \quad (\text{A.29})$$

$$= \frac{1}{i} \oint_{\delta\mathcal{K}} \frac{dz}{z} \cdot \frac{\Delta_\infty^2 z^{n_y} \frac{1}{2i} (z - \frac{1}{z})}{A^2 + \Delta_\infty^2 \frac{1}{2} (z - \frac{1}{z})} \quad (\text{A.30})$$

wobei

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{K} &= \{z \in C \mid |z| = 1\} \\ z &\rightarrow e^{i\varphi} \text{ für } \varphi \in [0, 2\pi[. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Mit dieser formalen Ersetzung läßt sich nun also weiterschreiben:

$$= -\frac{1}{2} \oint_{\delta\mathcal{K}} dz \cdot \Delta_\infty^2 \cdot \frac{z^{(n_y-1)}(z^2 - 1)}{A^2 z + \Delta_\infty^2 \frac{1}{2}(z^2 + 1)} \quad (\text{A.32})$$

$$= -\frac{1}{2} \oint_{\delta\mathcal{K}} \frac{dz}{z} \cdot \Delta_\infty^2 \cdot \frac{z^{n_y} (z^2 - 1)}{A^2 + \Delta_\infty^2 \frac{1}{2} (z^2 + 1)} \quad (\text{A.33})$$

$$= -\frac{1}{2} \oint_{\delta\mathcal{K}} \frac{dz}{z} \cdot 2\Delta_\infty^2 \cdot \frac{z^{n_y} (z^2 - 1)}{\frac{2A^2 z}{\Delta_\infty^2} + z^2 + 1} \quad (\text{A.34})$$

$$= -\oint_{\delta\mathcal{K}} \frac{dz}{z} \cdot \Delta_\infty^2 \cdot \frac{z^{n_y} (z^2 - 1)}{\frac{2A^2 z}{\Delta_\infty^2} + z^2 + 1}. \quad (\text{A.35})$$

Die Pole in der komplexen Ebene sind leicht zu bestimmen, und ergeben sich zu:

$$z_0 = 0 \quad (\text{A.36})$$

$$z_\pm = -\frac{A^2}{\Delta_\infty^2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 - 1}. \quad (\text{A.37})$$

Für $A^2 > \Delta_\infty^2$ folgt:

$$|z_-| > 1, \quad (\text{A.38})$$

und

$$z_+ = -\frac{A^2}{\Delta_\infty^2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 - 1} \quad (\text{A.39})$$

$$= \frac{\left(-\frac{A^2}{\Delta_\infty^2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 - 1}\right) \left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 - 1}\right)}{\frac{A^2}{\Delta_\infty^2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 - 1}} \quad (\text{A.40})$$

$$= -\frac{1}{\frac{A^2}{\Delta_\infty^2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 - 1}} \quad (\text{A.41})$$

Somit gilt also:

$$|z_+| < 1. \quad (\text{A.42})$$

Nun zur Berechnung des Integrals mit Hilfe des Residuensatzes (s. Abb.A.2). Sei:

$$f(z) = -\frac{1}{z} \cdot \frac{z^{n_y} (z^2 - 1)}{z^2 + 2z \frac{A^2}{\Delta_\infty^2} + 1} \quad (\text{A.43})$$

$$= \frac{z^{n_y-1} (z^2 - 1)}{z^2 + 2z \frac{A^2}{\Delta_\infty^2} + 1}. \quad (\text{A.44})$$

So ist:

$$\text{Res} [z = z_0, f(z)] = 0 \quad \text{für} \quad n_y > 0 \quad (\text{A.45})$$

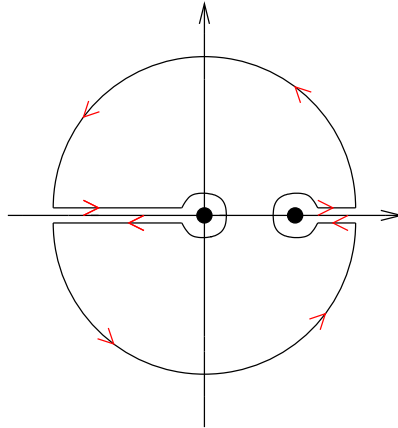


Abbildung A.1: Schematische Darstellung zur Anwendung des Residuensatzes. Gezeigt ist der benötigte Integrationsweg in der komplexen Ebene.

erfüllt. Der Fall $n_y = 0$ erübrigt sich, da $\sum \text{Res}[z = z_0, f(z)] = 0$ gelten muß.

Im Folgenden wird in Kürze die Bestimmung des Residuums der Funktion $f(z)$ an der Stelle z_+ vorgeführt.

$$\text{Res}[z = z_+, f(z)] = \text{Res}\left[z = z_+, \frac{z^{n_y-1}(z^2 - 1)}{(z - z_+)(z - z_-)}\right] \quad (\text{A.46})$$

$$= \frac{z_+^{n_y-1}(z_+^2 - 1)}{(z_+ - z_-)} \cdot \text{Res}\left[z = z_+; \frac{1}{z - z_+}\right]. \quad (\text{A.47})$$

Dabei gilt:

$$\text{Res}\left[z = z_+; \frac{1}{z - z_+}\right] = 1. \quad (\text{A.48})$$

Demzufolge läßt sich nun also weiterschreiben:

$$\begin{aligned} \text{Res}[z = z_+; f(z)] &= \frac{z_+^{n_y-1}(z_+^2 - 1)}{z_+ - z_+} \\ &= \frac{z_+^{n_y-1}z_+(z_+ - z_-)}{(z_+ - z_-)} \\ &= z_+^{n_y} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Dies eingesetzt in Gl. (A.35) ergibt schließlich weiterhin:

$$\begin{aligned}
\oint_{\delta\mathcal{K}} dz \cdot f(z) &= -2\pi i \cdot \text{Res} \left[z = z_+, \frac{z^{n_y}(z^2 - 1)}{(z - z_+)(z - z_-)} \right] \\
&= -2\pi i \cdot z_+^{n_y} \\
&= -2\pi i \cdot \frac{(-1)^{n_y}}{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 - 1}\right)^{n_y}}. \tag{A.50}
\end{aligned}$$

Das heißt, der Fourier-Koeffizient für $n_y > 0$ hat also letztendlich folgende Gestalt:

$$c_{Q_y} = -2\pi i \frac{(-1)^{n_y}}{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 - 1}\right)^{n_y}} \cdot e^{-in_y(\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta)BLx)}. \tag{A.51}$$

Der Fall $n_y < 0$ ergibt sich durch komplexe Konjugation des Fourier-Koeffizienten. Die komplexe Konjugation ausgeführt, liefert folgendes Ergebnis:

$$c_{Q_y}^* = -2\pi i \frac{(-1)^{n_y}}{\left[\frac{A^2}{\Delta_\infty^2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 - 1}\right]^{n_y}} \cdot e^{in_y(\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta)xBL)} \tag{A.52}$$

Somit folgt für die Fourier-Transformierte von j für $n_y < 0$:

$$j^*(x, y; \phi, B; \theta, \epsilon_n) = \sum_{Q_y} e^{-iQ_y y} \cdot (c_{Q_y})^* \tag{A.53}$$

$$= \sum_{Q_y} e^{iQ_y y} \cdot (c_{-Q_y})^* \tag{A.54}$$

$$= \sum_{Q_y} e^{iQ_y y} \cdot c_{Q_y}. \tag{A.55}$$

Mit Hilfe dieser Aussage, erkennt man sofort, daß folgende Identität erfüllt ist, nämlich:

$$j^*(x, y; \phi, B; \epsilon_n) \equiv j(x, y; \phi, B; \epsilon_n). \tag{A.56}$$

Dies wiederum heißt, daß der betrachtete Josephson-Strom reell und durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{Q_y}(\phi, B, \mathbf{r}, \epsilon_n) &= 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} v_F \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \frac{k_B T}{\hbar} N_{FS} \\
&\quad \sum_{\epsilon_n > 0} \sum_{Q_y} e^{iQ_y y} c_{Q_y}. \tag{A.57}
\end{aligned}$$

In diesem Kapitel wurde eine Fourier-Transformation eines berechneten Josephson-Stroms über eine SHS-Schichtstruktur angegeben. Im nächsten Kapitel wird daran anknüpfend gezeigt, wie dieser transformierte Strom dazu benutzt wird, um im Einklang mit den Maxwell-Gleichungen eine selbstkonsistente Lösung des Schichtstrukturproblems herbeizuführen. Der fouriertransformierte Strom wird sich dabei als besonders geeignet erweisen, dieses Problem zu lösen.

Anhang B

Die Berechnung des resultierenden Magnetfelds

Um das resultierende Magnetfeld in realen Laborkoordinaten (x, y) zu erhalten, wird aus Gl. (5.17) die Fourier-Transformierte errechnet und in das Laborsystem zurücktransformiert, vergleiche hierzu auch Kapitel ?? und Gl. (5.19), d. h.:

$$\mathbf{B}(x, y) = \sum_{n_y} e^{iQ_y y} B_{Q_y}(x). \quad (\text{B.1})$$

Mit dem Übergang $\partial_x \rightarrow Q_x$ werden die Terme auf der linken Seite von Gl. (5.11) weiter vereinfacht:

$$Q_x = n_y \frac{4e}{\hbar c} BL \cdot \tan(\theta) \quad (\text{B.2})$$

$$Q_x^2 + Q_y^2 = n_y^2 \left(\frac{4e}{\hbar c}\right)^2 B^2 L^2 (\tan^2(\theta) + 1) \quad (\text{B.3})$$

$$\partial_x b_{Q_y}^{(1)} = b_{n_y 0}^{(1)} e^{-in_y \phi} \left(-in_y \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BL\right) \cdot e^{-in_y \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BLx} \quad (\text{B.4})$$

$$\partial_x^2 b_{Q_y}^{(1)} = -b_{n_y 0}^{(1)} e^{-in_y \phi} n_y^2 \left(\frac{4e}{\hbar c}\right)^2 \tan^2(\theta) B^2 L^2 e^{-in_y \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BLx} \quad (\text{B.5})$$

$$Q_y^2 b_{Q_y}^{(1)} = \left(\frac{4e}{\hbar c}\right)^2 n_y^2 B^2 L^2 b_{n_y 0}^{(1)} \cdot e^{-in_y \phi} e^{-in_y \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BLx}. \quad (\text{B.6})$$

Somit gilt für die linke Seite von Gl. (5.11):

$$\begin{aligned} -\partial_x^2 b_{Q_y}^{(1)} + Q_y^2 b_{Q_y}^{(1)} &= \\ \left(\frac{4e}{\hbar c}\right)^2 n_y^2 B^2 L^2 b_{n_y 0}^{(1)} (\tan^2(\theta) + 1) \cdot e^{-in_y(\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BLx)}. & \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Vereinfache nun die rechte Seite:

$$\partial_x c_{Q_y} = (-in_y \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BL) c_{Q_y} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{4\pi}{c} (\partial_x v_y - iQ_y v_x) c_{Q_y} = -\frac{4\pi}{c} \cdot \frac{4e}{\hbar c} iBL c_{Q_y} (\tan(\theta) v_y + v_x) \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} (\partial_x v_y - iQ_y v_x) c_{Q_y} &= \\ &= \frac{4\pi}{c} (-in_y \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BL v_y - i \frac{4e}{\hbar c} BL n_y v_x) c_{Q_y} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$= -i \frac{4\pi}{c} n_y \frac{4e}{\hbar c} BL c_{Q_y} (\tan(\theta) v_y + v_x) \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{32\pi^2 e}{c^2 \hbar} BL d_{n_y} n_y (\tan(\theta) v_y + v_x) \\ &\quad \cdot e^{-in_y(\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BLx)}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Gleichsetzen der beiden Terme Gl. (B.7) und Gl. (B.12) liefert als Lösung $b_{n_y 0}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} -\partial_x^2 \cdot b_{Q_y}^{(1)} + Q_y^2 \cdot b_{Q_y}^{(1)} &= \\ &= b_{n_y 0}^{(1)} \left(\frac{4e}{\hbar c}\right)^2 n_y^2 B^2 L^2 (\tan^2(\theta) + 1) \\ &\quad \cdot e^{-in_y(\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BLx)}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

wobei:

$$b_{n_y 0}^{(1)} = -\frac{2\pi^2 d^{n_y} (\tan \theta v_y + v_x)}{\frac{e}{\hbar} n_y BL (\tan^2 \theta + 1)} \quad (\text{B.14})$$

$$= -\frac{2\pi^2 d^{n_y} |\mathbf{v}_F| (\tan(\theta) \sin \theta + \cos \theta)}{\frac{e}{\hbar} n_y BL (\tan^2 \theta + 1)} \quad (\text{B.15})$$

$$= -\frac{2\pi^2 d^{n_y} |\mathbf{v}_F| (\tan^2 \theta + 1) \cdot \cos \theta}{\frac{e}{\hbar} n_y BL (\tan^2 \theta + 1)} \quad (\text{B.16})$$

$$= -\frac{2\pi^2 d^{n_y} |\mathbf{v}_F| \cdot \cos \theta}{\frac{e}{\hbar} n_y BL}. \quad (\text{B.17})$$

Daraus folgt dann:

$$b_{n_y}^{(1)}(x) = b_{n_y 0}^{(1)} \cdot e^{-in_y \phi} e^{-in_y \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BLx} \quad (\text{B.18})$$

ist Lösung mit $b_{n_y 0}^{(1)}$ wie oben angegeben. Also hat $b_{n_y 0}^{(1)}$ folgende Form:

$$b_{n_y 0}^{(1)} = \frac{1}{n_y} b_0 \cdot d^{n_y}, \quad (\text{B.19})$$

wobei:

$$b_0 = -\frac{2\pi^2 \cos \theta}{\frac{e}{\hbar} BL} |\mathbf{v}_F| \quad (\text{B.20})$$

$$= -\frac{2\pi^2 v_{F_x}}{\frac{e}{\hbar} BL}. \quad (\text{B.21})$$

Damit folgt weiter:

$$b_{n_y}^{(1)} = \frac{1}{n_y} b_0 (e^{-i(\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BLx)})^{n_y} d^{n_y}; \quad (\text{B.22})$$

setze:

$$q := d \cdot e^{-i(\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BLx)} \quad (\text{B.23})$$

$$b_{n_y}^{(1)} = \frac{1}{n_y} q^{n_y} b_0, \quad (\text{B.24})$$

$$\partial_x v_y c_{Q_y} =$$

$$\frac{-2\pi n_y \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BL v_y (-1)^{n_y} e^{-in_y(\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) \cdot x \cdot B \cdot L)}}{\left[\frac{A^2}{\Delta_\infty^2} + \sqrt{\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}^2 - 1} \right]^{n_y}}. \quad (\text{B.25})$$

also gilt für das fouriertransformierte Magnetfeld:

$$B_{Q_y}^{(1)} = 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \cdot \frac{1}{n_y} q^{n_y} b_0, \quad (\text{B.26})$$

und für das rücktransformierte Magnetfeld:

$$\begin{aligned}
 B(x, y)^{(1)} &= \sum_{n_y} e^{iQ_y \cdot y} B_{n_y} \\
 &= 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} b_0 \\
 &\quad \cdot \sum_{n_y} e^{iQ_y \cdot y} \cdot \frac{1}{n_y} q^{n_y}.
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

Dabei ist:

$$e^{iQ_y \cdot y} = \left(e^{i \frac{2e}{\hbar c} B L y} \right)^{n_y} = (q_1)^{n_y}. \tag{B.28}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
 B(x, y)^{(1)} &= 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} b_0 \\
 &\quad \cdot \sum_{n_y} \frac{1}{n_y} (q \cdot q_1)^{n_y}
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

$$= 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} b_0 \sum_{n_y} \frac{1}{n_y} k^{n_y}, \tag{B.30}$$

hierbei wurde

$$k = q \cdot q_1 \tag{B.31}$$

gesetzt. Zur Berechnung der Summe wird nun ein gängiges Verfahren angewendet:

$$f := \sum_{n_y} \frac{1}{n_y} z^{n_y} \tag{B.32}$$

Die Ableitung lautet:

$$f'(z) = \sum_{n_y=1}^{\infty} z^{n_y-1} = \sum_{n_y=0}^{\infty} z^{n_y} = \frac{1}{1-z} \tag{B.33}$$

$$\Rightarrow f(z) = -\ln(1-z). \tag{B.34}$$

Also folgt für das rücktransformierte Magnetfeld:

$$\begin{aligned}
B(x, y)^{(1)} &= -8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \cdot b_0 \cdot \ln(1 - z) \\
&= -8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \cdot b_0 \\
&\quad \cdot \ln(1 - e^{i\frac{4e}{\hbar c} BLy} \cdot d \cdot e^{-i(\phi + \frac{4e}{\hbar c} \tan(\theta) BLx)}) \\
&= -8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \cdot b_0 \\
&\quad \cdot \ln(1 - d \cdot e^{-i(\phi + \frac{4e}{\hbar c} BL(x \tan(\theta) - y))}) \\
&= -8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \\
&\quad \cdot b_0 \ln(1 - d \cdot e^{-i\tilde{\phi}}). \tag{B.35}
\end{aligned}$$

Da der ursprünglich betrachtete Josephson-Strom reell ist, kann auch das von ihm verursachte Magnetfeld nur einen Realteil besitzen. Also sieht der Term für das resultierende Magnetfeld des Josephson-Stroms in Laborkoordinaten folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
B(x, y)^{(1)} &= \frac{8\pi^3}{\hbar} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \\
&\quad \cdot \frac{(\tan^2 \theta + 1) \cos \theta}{(\tan^2 \theta + 1) \frac{BL}{\hbar}} |\mathbf{v}_F| \ln(1 + d^2 - 2d \cos \tilde{\phi}). \tag{B.36}
\end{aligned}$$

Um die voranstehende Rechnung zu überprüfen, setze ich das errechnete Magnetfeld in die Maxwell-Gleichungen ein, und errechne den Ausgangsstrom. Aus den Maxwell-Gleichungen ergibt sich nun:

$$\mathbf{J} \cdot \frac{4\pi}{c} = \text{rot} \mathbf{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} \partial_y B_z \\ -\partial_x B_z \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.37}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{J} &= -\frac{c}{8\pi} \cdot 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \\ &\quad \cdot \frac{2\pi (\sin \theta \tan(\theta) + \cos \theta) |\mathbf{v}_F|}{\frac{BL}{\hbar} (1 + \tan^2 \theta)} \\ &\quad \cdot \frac{2d \cdot \frac{4e}{\hbar c} BL}{2 \cdot (1 + d^2 - 2d \cos \tilde{\phi})} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\phi} \\ \sin \tilde{\phi} \tan(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned} &= -2c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \cdot \frac{2\pi |\mathbf{v}_F| \hbar}{BL} \\ &\quad \cdot \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \cos \theta \cdot \frac{2d \frac{4e}{\hbar c} BL}{2(1 + d^2 - 2d \cos \tilde{\phi})} \\ &\quad \cdot \frac{\sin \tilde{\phi}}{\cos \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= -16\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \cdot |\mathbf{v}_F| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \frac{d \sin \tilde{\phi}}{1 + d^2 - 2d \cos \tilde{\phi}}. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Berechnung des letzten Faktors durch einsetzen von d führt auf:

$$\frac{d}{1 + d^2 - 2d \cos \tilde{\phi}} = \frac{-1}{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 - 1}}$$

$$\begin{aligned} &\cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 + \left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 - 1 + 2\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)\sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 - 1}} + \frac{2 \cos \tilde{\phi}}{\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 - 1}}} \\ &= \frac{-1}{\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 - 1} + \frac{1}{\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 - 1}} + 2 \cos \tilde{\phi}} \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{\frac{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 + \left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 - 1 + 2\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)\sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 - 1} + 1}{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 - 1}} + 2 \cos \tilde{\phi}} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{2\left(\frac{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 - 1 + \left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)\sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 - 1} + 1}{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_{\infty}^2}\right)^2 - 1}} + \cos \tilde{\phi}\right)}, \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

erweitert mit:

$$\frac{1}{\frac{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)}{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)}} \quad (\text{B.43})$$

folgt daraus:

$$\frac{d}{1 + d^2 - 2d \cos \tilde{\phi}}$$

$$= \frac{-1}{2\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right) \left(\frac{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 + \left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right) \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 - 1} + 1}{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 + \left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right) \sqrt{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)^2 - 1}} + \frac{\cos \tilde{\phi}}{\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right)} \right)} \quad (\text{B.44})$$

$$= \frac{-1}{2\left(\left(\frac{A^2}{\Delta_\infty^2}\right) + \cos \tilde{\phi}\right)}, \quad (\text{B.45})$$

nochmals erweitert mit:

$$\frac{\Delta_\infty^2}{\Delta_\infty^2} \quad (\text{B.46})$$

ergibt schließlich:

$$\frac{d}{1 + d^2 - 2d \cos \tilde{\phi}} = -\frac{\Delta_\infty^2}{2(A^2 + \Delta_\infty^2 \cos \tilde{\phi})}. \quad (\text{B.47})$$

Die Probe ergibt schlußendlich wieder den zu Anfang verwendeten Ausdruck für den Strom:

$$\mathbf{J} = 8\pi e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{k_B T}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} N_{FS} \cdot |\mathbf{v}_F| \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \frac{\Delta_\infty^2 \cdot \sin \tilde{\phi}}{A^2 + \Delta_\infty^2 \cdot \cos \tilde{\phi}} \quad (\text{B.48})$$

Literaturverzeichnis

- [1] B. D. Josephson, *Possible new effects in superconducting tunneling*, *Phys. Lett. A* **1**(7), 251 (1962)
- [2] J. R. Anderson, J. M. Rowell, *Probable observation of the Josephson superconducting tunnel effect*, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 230 (1963)
- [3] P. Dubos, H. Courtois, B. Pannetier, F.K. Wilhelm, A.D. Zaikin, G. Schön *Josephson critical current in a long mesoscopic S-N-S junction*, *Phys. Rev. B* **63**, 64502 (2001)
- [4] J. Clarke, *Proc. R. Soc. London, Ser. A***308**, 447 (1969)
- [5] J.G. Shepherd, *Proc. R. Soc. London, Ser. A***326**, 421 (1972)
- [6] P.G. de Gennes, *Rev. Mod. Phys.***36**, 225 (1964)
- [7] C.J. Lambert, R. Raimondi *Phase coherent transport in hybrid superconducting nanostructures*, *J. Phys. Condens. Matter* **10**, 901 (1998)
- [8] D. Esteve, H. Pothier, S. Gueron, N.O. Birge, M.H. Devoret *The proximity effect in mesoscopic diffusive conductors* published in *Mesoscopic electron transport* ed. by L. Sohn, L.P. Kouwenhoven, G. Schön, Kluwer Academic, Dordrecht/Boston/London (1997) pp. 375-406 (Nato ASI Series E 345, pp. 375-406)
- [9] W. Belzig, F.K. Wilhelm, C. Bruder, G. Schön, A.D. Zaikin *Quasclassical Greens Function approach to mesoscopic superconductivity*, *Superlattices Microstruct.* **25**(5/6), 627 (1999)
- [10] T. Kato, M. Imada, *Macroscopic quantum tunneling of a fluxon in a long Josephson junction*, *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** 2963 (1996)

- [11] K. Halterman and O. T. Valls *Phys. Rev. B* **62** 5904 (2000)
A. Gurevich and V. M. Vinokur *Phys. Rev. Lett.* **83** 3037 (1999)
- [12] R. Kleiner, P. Mueller, *Intrinsic Josephson effects in high-Tc superconductors*, *Phys. Rev. B* **49**, 1327 (1994)
- [13] A. Schmid in *Nonequilibrium Superconductivity Phonons, and Kapitza Boundaries*, edited by K.E. Gray (Plenum, New York, 1981)
weiterhin verschiedene Artikel in *Nonequilibrium Superconductivity*
edited by D.N. Langenberg, A.I. Larkin, (Elsevier, New York, 1986)
- [14] verschiedene Artikel in *Mesoscopic Electron Transport*, edited by
L.L. Sohn *et al.* (Kluwer, Dordrecht, 1997)
- [15] J.J. Baselmans, B.J. van Wees, T.M. Klapwijk *Reversing the direction of the supercurrent in a controllable Josephson junction*, *Nature* **397**, 43 (1999)
- [16] A. Morpurgo, B.J. van Wees, T.M. Klapwijk **72**, 966 (1998)
- [17] H. Pothier *et al.* **79**, 3490 (1997)
- [18] M. J. Feldman, *A Technique to Demonstrate Energy Level Quantization in a SQUID*, *Physica B* **284**, 2127 (2000)
- [19] A. M. Froitzheim, *Zustandsdichten und Strom - Phasenbeziehung schwach gekoppelter Supraleiter*, *Diplomarbeit* (1998)
- [20] M. Grajcar, M. Ebel, E. Ilichev, R. Kürsten, T. Matsuyama, U. Merkt, J. Niemeyer, H.-G. Meyer *Supercurrent-phase relation of an Nb/InAs(2DEG)/Nb-based Josephson junction*, private communication N. Schopohl (2001)
- [21] M. Götz, M. Grajcar, E. Ilichev, V.V. Khanin, A.B. Zorin, J. Niemeyer, H.-G. Meyer *Supercurrent-phase relation of an Nb/AlO_x/Al/AlO_x/Nb-based Josephson junction at the superconducting transition of the Al interlayer*, *Phys. Rev. B* **62**, R14645 (2000)
- [22] U. Schüssler, R. Kümmel, *Andreev scattering, Josephson currents, coupling energy in clean superconductor-semiconductor-superconductor junctions*, *Phys. Rev. B* **47(2)**, 2754 (1993)
- [23] Y. Takanaka, M. Tsukada, *Theory of superconducting proximity effect in a three-dimensional system in a clean limit*, *Phys. Rev. B* **42**, 2066 (1990)

- [24] J.L. Bardeen, J.L. Johnson, *Josephson current in pure superconducting-normal-superconducting junctions*, *Phys. Rev. B* **5**, 72 (1972)
- [25] M. Y.Kupriyanov, *Sov. J. Low Temp. Phys.* **7**, 342 (1981)
- [26] P. Pincus, *Magnetic field induced surface states in a pure Type-I superconductor*, *Phys. Rev.*, 346 (1967)
- [27] K.K. Likharev, *Superconducting weak links*, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 101 (1979)
- [28] J.W. Serene, D. Rainer, *The quasiclassical approach to superfluid ^3He* , *Physics Reports* **102(4)**, 221 (1983)
- [29] N. Schopohl, K. Maki, *Quasiparticle spectrum around a vortex line in a d-wave superconductor*, *Phys. Rev. B* **52**, 490 (1995)
- [30] N. Schopohl, *Transformation of the Eilenberger equations of superconductivity to a scalar riccati equation*, In D. Rainer, J.A. Sauls, editors, *Quasiclassical Theory in Strongly Correlated Systems*, Springer, (1998)
- [31] J.L. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, *Theory of superconductivity*, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957)
- [32] N.N. Bogoliubov, *On a new method in the theory of superconductivity*, *Nuovo Cimento* **VII(6)**, 795 (1958)
- [33] G.Valatin, *Comments on the theory of superconductivity*, *Nouvo Cimento* **VII(6)**, 843 (1958)
- [34] P.G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, W.A. Benjamin, (1966)
- [35] A.A. Andreev, *Electron spectrum of the intermediate state of superconductors*, *JETP* **22(1)**, 455 (1966)
- [36] A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov, I.E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Prentice-Hall, Inc., (1963)
- [37] A.L. Shelankov, *On the derivation of quasiclassical equations for superconductors*, *J. Low Temp. Phys.* **60**, 29 (1985)
- [38] A.I. Larkin, Yu.N. Ovchinnikov, *Quasiclassical method in the theory of superconductivity*, *JETP* **28(2)**, 1200 (1969)

- [39] G. Eilenberger, *Transformation of the Gorkov's equation for type II superconductors to transport-like equations*, *Z. Phys.* **214**(1), 195 (1968)
- [40] B. Ashauer, G. Kieselmann, D. Rainer, *On the proximity effect in unconventional superconductors*, *J. Low Temp. Phys.* **63**, 349 (1986)
- [41] D.A. Wharam, T.J. Thornton, R. Newbury, H. Ahmed, J.E.F. Frost, D.G. Hasko, D.C. Peacock, D.A. Ritchie, G.A.C. Jones, *One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance*, *J. Phys. C* **21** L209 (1988)
- [42] A.A. Andreev, *The thermal conductivity of the intermediate state in superconductors*, *JETP* **19**(2), 1228 (1964)
- [43] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity, International Series in Pure and Applied Physics*, McGraw-Hill Inc., (1996)
- [44] P.A.M. Benistant, H. van Kempen, P. Wyder, *Direct observation of Andreev-Reflection*, *Phys. Rev. Lett.* **51**(9), 817 (1983)
- [45] N. Schopohl, D. Waxman, *Scattering and bound states of quasiparticles at the A-B phase boundary of superfluid ^3He* , *Phys. Rev. Lett.* **63**(16), 1696 (1989)
- [46] U. Günsenheimer, U. Schüssler, R. Kümmel *Symmetry breaking, off-diagonal scattering, and Josephson currents in mesoscopic weak links*, *Phys. Rev. B* **49**, 6111 (1994)
- [47] T. van Duzer, C.W. Turner, *Principles of Superconductive Devices and Circuits* 2nd edition, Prentice Hall PTR (1999)
- [48] F.K. Wilhelm, G. Schön, A.D. Zaikin, *Mesoscopic Superconducting-Normal Metal-Superconducting Transistor*, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1682 (1998)
- [49] A.V. Galaktionov, A.D. Zaikin *Quantum interference and supercurrent in multiple-barrier proximity structures*, *Phys. Rev. B* **65**, 184507 (2002)
- [50] B.J. van Wees *et al.* **25**(5/6), (1999)
- [51] F.S. Bergeret, A.F. Volkov, K.B. Efetov *Josephson current in superconductor-ferromagnet structures with a nonhomogeneous magnetization*, *Phys. Rev. B* **64**, 134506 (2001)

- [52] L. Balents, S.H. Simon *Commensurability Effects in Large Josephson Junctions*, *Phys. Rev. B* **51**, 6515 (1995)
- [53] M.A. Itzler, M. Tinkham *Equivalent phenomena for commensurate vortex states and zero field in a modulated sine-Gordon system*, *Phys. Rev. B* **51**, 9411 (1995)
- [54] R.W. Simon, P.M. Chaikin *Penetration depth in proximity-effect superconductors*, *Phys. Rev. B* **30**, 3750 (1984)

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig, und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Quellen verfaßt zu haben.

Danksagung

Zum Abschluß bedanke ich mich bei allen, die mich bei meiner Arbeit unterstützt haben. Herrn Prof. Dr. N. Schopohl danke ich für die Betreuung sowie die großzügige Förderung der Arbeit. Hervorragende Arbeitsbedingungen und wertvolle Anregungen trugen wesentlich zum Gelingen bei.

Ein großes Dankeschön richte ich an die Arbeitsgruppe: Herrn Dipl. Phys. Christoph Häußler und Herrn Dipl. Phys. Thomas Träuble danke ich besonders für fruchtbare Diskussionen. Bei Herrn Dipl. Phys. Jörg Tömes und Herrn Dipl. Phys. Michael Seifried möchte ich mich für die exzellente Betreuung der Computer bedanken.

Besonders herzlich danke ich meinen Eltern, Freunden und all jenen, die dazu beigetragen haben, daß ich diese Arbeit fertigstellen konnte.